

**VIỆN KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM**

VIỆN TOÁN HỌC

DƯƠNG THỊ KIM HUYỀN

**TÍNH MỞ CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ VÀ
CÁC ĐỊNH LÝ HÀM ẨN**

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

MÃ SỐ : 60 46 36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS. TSKH. NGUYỄN ĐÔNG YÊN**

HÀ NỘI - NĂM 2011

Mục lục

Lời mở đầu	1
1 Kiến thức chuẩn bị	5
1.1 Ánh xạ đa trị	5
1.2 Nguyên lý biến phân Ekeland	9
1.3 Nón pháp tuyến, dưới vi phân, đối đạo hàm . . .	9
1.4 Quy tắc tổng mờ	11
2 Các kết quả về tính mở	15
2.1 Định lý ánh xạ mở	15
2.2 Sự cần thiết của tính đóng	20
2.3 Trường hợp ánh xạ có tham số	22
3 Các định lý hàm ẩn	26
3.1 Tính nửa liên tục dưới của hàm ẩn đa trị	26
3.2 Tính metric chính quy của hàm ẩn đa trị	28
3.3 Đối đạo hàm của hàm ẩn đa trị	33

3.4	Tính giả Lipschitz của hàm ẩn đa trị	36
	Kết luận	38

MỘT SỐ KÝ HIỆU

$\ x\ $	chuẩn của x
$\mathcal{V}(x)$	họ các lân cận của x
$B(x, r), D(x, r)$	hình cầu mở và hình cầu đóng tâm x , bán kính r
S_X	mặt cầu đơn vị trong X
$d(x, A)$	khoảng cách từ x đến A
$x \xrightarrow{S} \bar{x}$	$x \rightarrow \bar{x}$ và $x \in S$
$x \xrightarrow{f} \bar{x}$	$x \rightarrow \bar{x}$ và $f(x) \rightarrow f(\bar{x})$
$\widehat{N}_\varepsilon(S, x)$	tập các vectơ ε -pháp tuyến của S tại x
$\widehat{N}(S, x)$	nón pháp tuyến Fréchet của S tại x
$N(S, \bar{x})$	nón pháp tuyến cơ sở của S tại \bar{x}
$\widehat{\partial}f(\bar{x})$	dưới vi phân Fréchet của f tại \bar{x}
$\partial f(\bar{x})$	dưới vi phân cơ sở của f tại \bar{x}
δ_Ω	hàm chỉ của tập $\emptyset \neq \Omega \subset X$
$F : X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị từ X vào Y
$\text{Dom}F$	miền hữu hiệu của F
$\text{Gr}F$	đồ thị của F
$\widehat{D}^*F(\bar{x}, \bar{y})(\cdot)$	đối đạo hàm Fréchet của F tại (\bar{x}, \bar{y})
$D^*F(\bar{x}, \bar{y})(\cdot)$	đối đạo hàm Mordukhovich của F tại (\bar{x}, \bar{y})

Lời mở đầu

Tiếp sau sự phát triển đạt đến mức độ hoàn thiện của Giải tích lồi [21], Giải tích không trơn [7], Giải tích đa trị [3, 4], một lý thuyết mới dưới tên gọi là *Giải tích biến phân* đã ra đời và ngày càng được chú ý. Các kết quả cơ bản của Giải tích biến phân trong các không gian hữu hạn chiều của đã được trình bày trong cuốn chuyên khảo của R. T. Rockafellar và R. J.-B. Wets [22]. Bộ sách hai tập [17] của B. S. Mordukhovich trình bày nhiều kết quả sâu sắc về Giải tích biến phân và phép tính vi phân suy rộng trong không gian vô hạn chiều, cùng với những ứng dụng phong phú trong Quy hoạch toán học, Lý thuyết các bài toán cân bằng, Điều khiển tối ưu các hệ động lực được mô tả bởi phương trình tiến hóa, Điều khiển tối ưu các hệ động lực được mô tả bởi phương trình đạo hàm riêng, Tối ưu vectơ, và Cân bằng kinh tế. Các kỹ thuật cơ bản của Giải tích biến phân và mối liên hệ của nó với các kỹ thuật của Giải tích hàm được trình bày trong cuốn chuyên khảo của J. M. Borwein và Q. J. Zhu [6].

Tính mở là một tính chất quan trọng khi nghiên cứu ánh xạ đa trị cũng như ánh xạ đơn trị. Tính chất này rất hữu ích trong nhiều lĩnh vực của lý thuyết tối ưu, ví dụ như trong việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán bị nhiễu, hay trong việc chứng minh các điều kiện tối ưu cho các bài toán quy hoạch toán học.

Luận văn này trình bày một số kết quả về tính mở của ánh

xạ đa trị và các định lý hàm ẩn dựa trên bài báo [10] của hai nhà toán học Rumani là M. Durea và R. Strugariu (đã được đăng trên Pacific Journal of Optimization, Vol. 6, No. 3, 2010, pp. 533-549). Những kết quả của hai tác giả này đã phát triển và làm sâu sắc thêm các định lý hàm ẩn trong bài báo của G. M. Lee, N. N. Tam và N. D. Yen [13].

Khả năng sử dụng cách tiếp cận của [10] để phát triển thêm một bước các kết quả của N. D. Yen và J.-C. Yao [23] (sử dụng đối đạo hàm Mordukhovich tại một điểm trên đồ thị của ánh xạ đa trị được xét) vẫn còn là một vấn đề mở.

Lưu ý rằng các kết quả tương tự như các kết quả của [10] đã được M. Durea trình bày trong [9].

Chương 1 trình bày các khái niệm thông dụng trong Giải tích đa trị và Giải tích biến phân, cùng với một số kết quả kinh điển: Nguyên lý biến phân Ekeland, Quy tắc tổng mờ.

Chương 2 chứng minh một số kết quả về tính mở của ánh xạ đa trị, xét riêng các trường hợp ánh xạ không có tham số và ánh xạ có tham số. Ở đây, theo cách tiếp cận của M. Durea và R. Strugariu [10], chúng ta khai thác một điều kiện chính quy của họ đối đạo hàm Fréchet: Tồn tại các hằng số $c > 0$, $r > 0$, $s > 0$ sao cho với mọi $(x, y) \in \text{Gr}F \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)]$ và với mọi $y^* \in Y^*$, $x^* \in \hat{D}^*F(x, y)(y^*)$,

$$c\|y^*\| \leq \|x^*\|, \quad (1)$$

trong đó $\hat{D}^*F(x, y)(\cdot) : Y^* \rightrightarrows X^*$ ký hiệu đối đạo hàm Fréchet của ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ giữa hai không gian Asplund X

và Y tại điểm (x, y) thuộc tập *đồ thị*

$$\text{Gr}F := \{(u, v) \in X \times Y \mid v \in F(u)\}, \quad (2)$$

và $B(\bar{x}, r)$ ký hiệu hình cầu mở có tâm \bar{x} và bán kính r . Điều kiện chính quy vừa nêu tương tự với các điều kiện đã được các tác giả khác đưa ra trước đây [12, 13, 18]. Số c trong (1) có liên quan đến khái niệm *hằng số Banach* (chính là *độ mở*) của toán tử tuyến tính.

Chương 3 đề cập đến hàm ẩn đa trị. Chúng ta sẽ thấy rằng, với những giả thiết thích hợp, hàm ẩn đa trị thừa hưởng một tính chất của ánh xạ đa trị chứa tham số ban đầu. Cụ thể hơn, các tính chất được bàn tới ở đây là tính nửa liên tục dưới, tính chính quy metric, tính giả Lipschitz (còn được gọi là tính tựa Aubin, hoặc tính giống-Lipschitz). Các tính chất này được chứng minh dựa trên các kết quả trình bày trong Chương 2. Một số các kết quả ở Chương 3, còn có một đánh giá dưới cho đạo hàm của hàm ẩn đa trị (Định lý 3.3).

Luận văn có một kết quả mới, đó là khẳng định ở Mục 2.2 (Chương 2) nói rằng kết luận trong định lý ánh xạ mở của Brouwer và R. Strugariu [10, Theorem 3.1] không còn đúng, tại bỏ giả thiết về tính đóng của ánh xạ đa trị được xét.

Luận văn này được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Khoa học Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên.

Tác giả chân thành cảm ơn thầy Nguyễn Đông Yên và các đồng nghiệp của thầy đã giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình viết luận văn.

Tác giả cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn các thầy cô và

và Y tại điểm (x, y) thuộc tập *đồ thị*

$$\text{Gr}F := \{(u, v) \in X \times Y \mid v \in F(u)\}, \quad (2)$$

và $B(\bar{x}, r)$ ký hiệu hình cầu mở có tâm \bar{x} và bán kính r . Điều kiện chính quy vừa nêu tương tự với các điều kiện đã được các tác giả khác đưa ra trước đây [12, 13, 18]. Số c trong (1) có liên quan đến khái niệm *hằng số Banach* (chính là *độ mở*) của toán tử tuyến tính.

Chương 3 đề cập đến hàm ẩn đa trị. Chúng ta sẽ thấy rằng, dưới những giả thiết thích hợp, hàm ẩn đa trị thừa hưởng một số tính chất của ánh xạ đa trị chứa tham số ban đầu. Cụ thể hơn, các tính chất được bàn tới ở đây là tính nửa liên tục dưới, tính chính quy metric, tính giả Lipschitz (còn được gọi là tính chất Aubin, hoặc tính giống-Lipschitz). Các tính chất này được chứng minh dựa trên các kết quả trình bày trong Chương 2. Trong số các kết quả ở Chương 3, còn có một đánh giá dưới cho đối đạo hàm của hàm ẩn đa trị (Định lý 3.3).

Luận văn có một kết quả mới, đó là khẳng định ở Mục 2.2 (Chương 2) nói rằng kết luận trong định lý ánh xạ mở của M. Durea và R. Strugariu [10, Theorem 3.1] không còn đúng, nếu loại bỏ giả thiết về tính đóng của ánh xạ đa trị được xét.

Luận văn này được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên.

Tác giả chân thành cảm ơn thầy Nguyễn Đông Yên và các nghiên cứu sinh của thầy đã giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình làm luận văn.

Tác giả cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn các thầy cô và

cán bộ công nhân viên của Viện Toán học đã quan tâm giúp đỡ trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Viện.

Hà Nội, ngày 29 tháng 8 năm 2011

Tác giả luận văn



Dương Thị Kim Huyền

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số khái niệm cơ bản của Giải tích đa trị và Giải tích biến phân, cùng với một số kết quả kinh điển, như Nguyên lý biến phân Ekeland, Quy tắc tổng mờ.

1.1 Ánh xạ đa trị

Cho X và Y là các không gian tôpô. Xét ánh xạ đa trị

$$F : X \rightrightarrows Y$$

xác định trên X , nhận giá trị trong tập các tập hợp con của Y . *Đồ thị* (graph) của F được cho bởi (2), còn *miền hữu hiệu* (effective domain) của F được cho bởi

$$\text{Dom}F := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}.$$

Nếu $A \subset X$ thì $F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x)$ là ảnh của tập A qua ánh xạ F . Tập $F(X)$ được ký hiệu bởi $\text{Im}F$ và được gọi là *ảnh* (image)

của F . *Ánh xạ ngược* (inverse mapping) $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ của F được xác định bởi công thức

$$F^{-1}(y) := \{x \in X \mid y \in F(x)\} \quad (\forall y \in Y).$$

Các khái niệm sau đây là khá thông dụng trong Giải tích đa trị. Ta ký hiệu hệ thống các lân cận của $x \in X$ bởi $\mathcal{V}(x)$.

Định nghĩa 1.1. Ta nói F là *nửa liên tục dưới* (lower semicontinuous, hay lsc) tại $x \in X$ nếu với mọi tập mở mà $F(x) \cap D \neq \emptyset$, tồn tại $U \in \mathcal{V}(x)$ sao cho $F(x') \cap D \neq \emptyset$, với mọi $x' \in U$.

Trong các phần sau, ta sẽ sử dụng một giả thiết yếu hơn về tính liên tục (xem [17, Definition 1.63]).

Định nghĩa 1.2. Ta nói F là *nửa liên tục bên trong* (inner semicontinuous, hay isc) tại $(x, y) \in X \times Y$ nếu với mọi tập mở $D \subset Y$ mà $y \in D$, tồn tại $U \in \mathcal{V}(x)$ sao cho $F \cap D \neq \emptyset$ với mọi $x' \in U$.

Dễ thấy rằng khái niệm nói trong Định nghĩa 1.2 yếu hơn khái niệm nói trong Định nghĩa 1.1. Trên thực tế, F là nửa liên tục dưới tại x khi và chỉ khi nó là nửa liên tục bên trong tại mọi điểm (x, y) với mỗi $y \in F(x)$.

Ví dụ 1.1. Cho ánh xạ đa trị $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi $F(0) = [-1, 1]$ và $F(x) = \{0\}$ với mọi $x \neq 0$. F nửa liên tục bên trong tại $(0, 0)$, nhưng không nửa liên tục dưới tại 0. Cụ thể, F không nửa liên tục bên trong tại mọi điểm $(0, y)$, với $y \in F(0) \setminus \{0\}$, tức là $y \in [-1, 0) \cup (0, 1]$. Thật vậy, xét tập mở $D \subset \mathbb{R}$ với $y \in D$, nhưng $0 \notin D$. Khi đó, với mọi $U \in \mathcal{V}(0)$, ta có $F(x') \cap D = \emptyset$ với mỗi $x' \in U \setminus \{0\}$.

Bây giờ, ta giả sử X và Y là các không gian định chuẩn. Ký hiệu $B(x, r)$ và $D(x, r)$ lần lượt là các hình cầu mở và hình cầu đóng tâm x bán kính r . Đôi khi, ta ký hiệu B_X , D_X , S_X là các hình cầu mở, hình cầu đóng, và mặt cầu đơn vị trong X .

Khoảng cách từ $x \in X$ đến $A \subset X$ được định nghĩa như sau:

$$d(x, A) := \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

Thông thường, ta quy ước $d(x, \emptyset) = +\infty$. Ta xét chuẩn tổng khi làm việc với không gian tích $X \times Y$, tức là ta đặt

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \quad (\forall (x, y) \in X \times Y).$$

Định nghĩa 1.3. Ta nói ánh xạ đa trị F là *mở* (open) tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr}F$ nếu ảnh của một lân cận bất kỳ của \bar{x} qua F là một lân cận của \bar{y} .

Ta để ý rằng F là nửa liên tục bên trong tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr}F$ khi và chỉ khi F^{-1} là mở tại (\bar{y}, \bar{x}) .

Tính mở với tỷ lệ tuyến tính như trong định nghĩa sau đây là mạnh hơn tính mở nói trong Định nghĩa 1.3.

Định nghĩa 1.4. Ta nói $F : X \rightrightarrows Y$ là *mở với tỷ lệ tuyến tính* (open with linear rate) quanh $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr}F$ nếu tồn tại hai lân cận $U \in \mathcal{V}(\bar{x})$, $V \in \mathcal{V}(\bar{y})$ và một số $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $(x, y) \in \text{Gr}F \cap (U \times V)$ và với mọi $\rho \in (0, \varepsilon)$ ta có

$$B(y, \rho\varepsilon) \subset F(B(x, \rho)).$$

Tính mở với tỷ lệ tuyến tính tương đương (xem J.-P. Penot [19], J. M. Borwein và D. M. Zhuang [5]) với tính chất metric chính quy của F quanh (\bar{x}, \bar{y}) được phát biểu như sau.

Định nghĩa 1.5. Ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$ được gọi là *mêtric chính quy* (metrically regular) quanh $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr}F$ nếu tồn tại $a > 0$ và hai lân cận $U \in \mathcal{V}(\bar{x})$, $V \in \mathcal{V}(\bar{y})$ sao cho với mọi $u \in U$ và với mọi $v \in V$ ta có

$$d(u, F^{-1}(v)) \leq ad(v, F(u)).$$

Tính chất mêtric chính quy trong Định nghĩa 1.5 là một trường hợp đặc biệt của tính mêtric chính quy của hàm ẩn đa trị mà ta sẽ bàn tới ở Chương 3. Lưu ý rằng tính mêtric chính quy của hàm ẩn đa trị là khái niệm do S. M. Robinson [20] đưa ra năm 1976.

Một tính chất khác có liên quan mật thiết với tính mở với tỷ lệ tuyến tính và tính mêtric chính quy là tính chất giả Lipschitz như trong định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.6. Ta nói $F : X \rightrightarrows Y$ là *giả Lipschitz* (pseudo-Lipschitz) quanh $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr}F$ với môđun $\ell > 0$ nếu tồn tại hai lân cận $U \in \mathcal{V}(\bar{x})$ và $V \in \mathcal{V}(\bar{y})$ sao cho

$$F(x) \cap V \subset F(u) + \ell \|x - u\| D_Y \quad (\forall x \in U, \forall u \in U).$$

Tính chất quan trọng này do J.-P. Aubin [2] đưa ra năm 1984. Để ghi công J.-P. Aubin trong việc phát triển Giải tích đa trị và các ứng dụng, A. L. Dontchev và R. T. Rockafellar [8] đã đề nghị gọi tính giả Lipschitz của ánh xạ đa trị là *tính chất Aubin* (the Aubin property). Một số tác giả khác đề nghị sử dụng thuật ngữ *tính giống-Lipschitz* (the Lipschitz-like property) cho khái niệm này (xem B. S. Mordukhovich [17]).

1.2 Nguyên lý biến phân Ekeland

Nguyên lý biến phân do I. Ekeland [11] đề xuất năm 1974 là một công cụ mạnh trong Giải tích phi tuyến, Giải tích không trơn, Giải tích đa trị, Giải tích biến phân, và trong các hướng khác nhau của toán học ứng dụng.

Định lý 1.1. *Cho (X, d) là không gian mêtric đầy đủ và $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm chính thường (tức là miền xác định*

$$\text{dom} f := \{x \in X \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

của f là khác rỗng), nửa liên tục dưới và bị chặn dưới ở trên X . Khi đó, với mọi $\bar{x} \in \text{dom} f$ và với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_\varepsilon \in X$ sao cho

$$f(x_\varepsilon) \leq f(\bar{x}) - \varepsilon d(\bar{x}, x_\varepsilon)$$

và với mọi $x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}$,

$$f(x_\varepsilon) < f(x) + \varepsilon d(x, x_\varepsilon).$$

Chứng minh của định lý này có thể xem trong [1, 3, 11, 17].

1.3 Nón pháp tuyến, dưới vi phân, đối đạo hàm

Chúng ta trình bày lại những nét chính của phép xây dựng nón pháp tuyến, dưới vi phân, đối đạo hàm - những khái niệm chính của Giải tích biến phân theo cách tiếp cận bằng không gian đối ngẫu của B. S Mordukhovich và các cộng sự.

Trước hết, ta nhắc lại rằng X^* ký hiệu đối ngẫu tôpô của không gian định chuẩn X . Giá trị của phiếm hàm $x^* \in X^*$ tại $x \in X$ được ký hiệu bởi $\langle x^*, x \rangle$. Các ký hiệu w và w^* được dùng để chỉ tôpô yếu và tôpô yếu* của cặp đối ngẫu (X, X^*) .

Cho tập hợp khác rỗng S và một hàm $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, ở đó $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, ta dùng các ký hiệu sau:

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{S} \bar{x} \text{ nếu } x \rightarrow \bar{x} \text{ và } x \in S, \\ x &\xrightarrow{f} \bar{x} \text{ nếu } x \rightarrow \bar{x} \text{ và } f(x) \rightarrow f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.7. Cho X là một không gian định chuẩn, S là một tập con khác rỗng của X , và $\bar{x} \in S$.

(a) Với mỗi $x \in S$ và với mỗi $\varepsilon \geq 0$, tập các vectơ ε -pháp tuyến của S tại x là

$$\widehat{N}_\varepsilon(S, x) := \left\{ x^* \in X^* \mid \limsup_{u \xrightarrow{S} x} \frac{\langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \leq \varepsilon \right\}. \quad (1.1)$$

Nếu $\varepsilon = 0$ thì các phần tử ở vế phải của (1.1) được gọi là các vectơ pháp tuyến Fréchet. Tập các vectơ pháp tuyến đó được ký hiệu bởi $\widehat{N}(S, x)$, và được gọi là *nón pháp tuyến Fréchet* của S tại x .

(b) *Nón pháp tuyến cơ sở* (còn được *nón pháp tuyến qua giới hạn*, hay *nón pháp tuyến Mordukhovich*) của S tại \bar{x} là tập hợp

$$\begin{aligned} N(S, \bar{x}) := \{ & x^* \in X^* \mid \exists \varepsilon \downarrow 0, \\ & x_n \xrightarrow{S} \bar{x}, x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*, x_n^* \in \widehat{N}_{\varepsilon_n}(S, x_n) \forall n \in \mathbb{N} \}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

ở đó $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Nếu X là không gian Asplund (tức là không gian Banach mà mọi hàm lồi liên tục xác định trên một tập lồi mở đều khả vi

trên một tập con trù mật của tập mở đó), thì công thức tính nón pháp tuyến cơ sở (1.2) có dạng đơn giản hơn. Cụ thể là,

$$\begin{aligned} N(S, \bar{x}) = \{x^* \in X^* \mid \exists x_n \xrightarrow{S} \bar{x}, \\ x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*, x_n^* \in \widehat{N}(S, x_n) \forall n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.4 Quy tắc tổng mờ

Cho $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ hữu hạn tại $\bar{x} \in X$. Dưới vi phân Fréchet của f tại \bar{x} là tập hợp

$$\widehat{\partial}f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in \widehat{N}(\text{epi}f, (\bar{x}, f(\bar{x})))\}.$$

Dưới vi phân cơ sở (còn được gọi là dưới vi phân qua giới hạn, hoặc dưới vi phân Mordukhovich) của f tại \bar{x} là

$$\partial f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N(\text{epi}f, (\bar{x}, f(\bar{x})))\},$$

ở đó $\text{epi}f$ kí hiệu tập trên đồ thị (epigraph) của f .

Ta luôn có $\widehat{\partial}f(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x})$.

Để ý rằng $\widehat{\partial}f(\bar{x})$ là tập lồi, đóng yếu*.

Nếu X là không gian hữu hạn chiều, thì $\partial f(\bar{x})$ là tập đóng, có thể không lồi (xem [17, p. 11] và [1]). Nếu X là không gian vô hạn chiều, thì $\partial f(\bar{x})$ có thể không đóng [17, Example 1.7]

Trong không gian Asplund, ta có

$$\partial f(\bar{x}) = \limsup_{x \xrightarrow{f} \bar{x}} \widehat{\partial}f(x).$$

Nếu f là lồi, thì cả hai dưới vi phân $\widehat{\partial}f(\bar{x})$ và $\partial f(\bar{x})$ đều trùng với dưới vi phân của f tại \bar{x} theo nghĩa Giải tích lồi [21].

Nếu kí hiệu δ_Ω là hàm chỉ của một tập khác rỗng $\Omega \subset X$ (tức là $\delta_\Omega(x) = 0$ nếu $x \in \Omega$, $\delta_\Omega = +\infty$ nếu $x \notin \Omega$), thì với mọi $\bar{x} \in \Omega$ ta có $\widehat{\partial}\delta_\Omega(\bar{x}) = \widehat{N}(\Omega, \bar{x})$ và $\partial\delta_\Omega(\bar{x}) = N(\Omega, \bar{x})$.

Cho $\Omega \subset X$ là một tập khác rỗng và $\bar{x} \in \Omega$. Khi đó, ta có

$$\widehat{\partial}d(., \Omega)(\bar{x}) = \widehat{N}(\Omega, \bar{x}) \cap D_{X^*}, \quad \widehat{N}(\Omega, \bar{x}) = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda \widehat{\partial}d(., \Omega)(\bar{x}).$$

Nếu Ω là tập đóng thì

$$N(\Omega, \bar{x}) = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda \partial d(., \Omega)(\bar{x}).$$

Mỗi phần tử $x^* \in \widehat{\partial}f(\bar{x})$ được gọi là một *dưới gradient Fréchet* của f tại \bar{x} . Ta có mô tả biến phân trơn (xem [17, Theorem 1.88(i)]) cho các dưới gradient Fréchet như sau.

Mệnh đề 1.1. (Mô tả biến phân trơn của dưới gradient Fréchet)
 Cho $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ hữu hạn tại \bar{x} và cho $x^* \in X^*$. Nếu có một lân cận U của \bar{x} và một hàm $s : U \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi Fréchet tại \bar{x} với đạo hàm $\nabla s(\bar{x}) = x^*$ sao cho f đạt cực tiểu địa phương tại \bar{x} , thì $x^* \in \widehat{\partial}f(\bar{x})$. Điều ngược lại cũng đúng, tức là nếu $x^* \in \widehat{\partial}f(\bar{x})$ thì có một lân cận U của \bar{x} và một hàm $s : U \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi Fréchet tại \bar{x} sao cho

$$s(\bar{x}) = f(\bar{x}), \quad \nabla s(\bar{x}) = x^*, \quad s(x) \leq f(x)$$

với mọi $x \in U$.

Quy tắc tổng mờ (a fuzzy sum rule) [17, Theorem 2.33] sau

đây cho dưới vi phân Fréchet là một trong những công cụ chính để thu được các kết quả về tính mở của ánh xạ đa trị.

Định lý 1.2. (Quy tắc tổng mờ) *Cho X là không gian Apslund và $\varphi_1, \varphi_2 : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sao cho φ_1 liên tục Lipschitz quanh $\bar{x} \in \text{dom}\varphi_1 \cap \text{dom}\varphi_2$ và φ_2 nửa liên tục dưới quanh \bar{x} . Khi đó, với mọi $\gamma > 0$ ta có*

$$\widehat{\partial}(\varphi_1 + \varphi_2)(\bar{x}) \subset \bigcap \{ \widehat{\partial}\varphi_1(x_1) + \widehat{\partial}\varphi_2(x_2) \mid x_i \in \bar{x} + \gamma D_X, \\$$

$$|\varphi_i(x_i) - \varphi_i(\bar{x})| \leq \gamma, i = 1, 2 \} + \gamma D_X.$$

Dưới vi phân cơ sở thỏa mãn quy tắc tổng thô [17, Theorem 2.33] sau đây.

Định lý 1.3. (Quy tắc tổng thô) *Nếu X là không gian Apslund và $f_1, f_2, \dots, f_{n-1} : X \rightarrow \mathbb{R}$ là Lipschitz quanh \bar{x} và $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ là nửa liên tục dưới quanh \bar{x} (tức là f_n nửa liên tục dưới tại mỗi điểm thuộc một lân cận nào đó của \bar{x}), thì*

$$\partial\left(\sum_{i=1}^n f_i(\bar{x})\right) \subset \sum_{i=1}^n \partial f_i(\bar{x}).$$

Định nghĩa 1.8. Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị và $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr}F$. Khi đó, *đối đạo hàm Fréchet* (the Fréchet coderivative) tại (\bar{x}, \bar{y}) của F là ánh xạ đa trị $\widehat{D}^*F(\bar{x}, \bar{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$ xác định bởi

$$\widehat{D}^*F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in \widehat{N}(\text{Gr}F, (\bar{x}, \bar{y}))\}.$$

Tương tự, *đối đạo hàm chuẩn tắc* (the normal coderivative), còn gọi là *đối đạo hàm Mordukhovich* (the Mordukhovich coderivative), của F tại (\bar{x}, \bar{y}) là ánh xạ đa trị $D_N^*F(\bar{x}, \bar{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$

xác định bởi

$$D_N^*F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \{x^* \in X^* | (x^*, -y^*) \in N(\text{Gr}F, (\bar{x}, \bar{y}))\}.$$

Khái niệm đối đạo hàm chuẩn tắc, độc lập với nón pháp tuyến dùng trong định nghĩa của nó, đã được đưa ra bởi B. S. Mordukhovich [14] vào năm 1980.

Nếu xét các ánh xạ đa trị có đồ thị lồi, thì ta có một dạng biểu diễn đặc biệt cho đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm chuẩn tắc.

Mệnh đề 1.2. (xem [17, Proposition 1.37]) Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có đồ thị lồi và $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr}F$. Khi đó, với mọi $y^* \in Y^*$, ta có công thức tính giá trị của đối đạo hàm như sau:

$$\begin{aligned} & \widehat{D}^*F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \\ &= D_N^*F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) \\ &= \left\{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, \bar{x} \rangle - \langle y^*, \bar{y} \rangle = \max_{(x, y) \in \text{Gr}F} [\langle x^*, x \rangle - \langle y^*, y \rangle] \right\}. \end{aligned}$$

Trong trường hợp này, hai toán tử đối đạo hàm $\widehat{D}^*F(\bar{x}, \bar{y})(\cdot)$ và $D_N^*F(\bar{x}, \bar{y})(\cdot)$ cùng được ký hiệu bởi $D^*F(\bar{x}, \bar{y})(\cdot)$.

Chương 2

Các kết quả về tính mở

Trong chương này, chúng ta sẽ chứng minh một số kết quả về tính mở của ánh xạ đa trị. Các trường hợp ánh xạ không có tham số và ánh xạ có tham số sẽ được xét riêng rẽ.

2.1 Định lý ánh xạ mở

Ta bắt đầu với một kết quả về tính mở của ánh xạ đa trị. Phần kết luận và kỹ thuật chứng minh trong kết quả sau đây là cơ bản, theo nghĩa từ đó ta có thể rút ra các kết quả về tính mở của ánh xạ đa trị có tham số và các định lý hàm ẩn. Kỹ thuật này cũng như kết quả sau đây đã có trong [19, Theorem 2.3], nhưng ở [10] các tác giả M. Durea và R. Strugariu đã thu được một đánh giá chính xác hơn cho các lân cận của điểm (\bar{x}, \bar{y}) nói trong tính chất mở.

Định lý 2.1. *Cho X, Y là các không gian Asplund, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị và $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr}F$. Giả sử các giả thiết sau thỏa mãn:*

- (i) $\text{Gr}F$ là đóng

- (ii) Tồn tại $c > 0$, $r > 0$, $s > 0$ sao cho với mọi $(x, y) \in \text{Gr}F \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)]$ và mọi $y^* \in Y^*$, $x^* \in \widehat{D}^*F(x, y)(y^*)$, $c\|y^*\| \leq \|x^*\|$.

Khi đó, với mọi $a \in (0, c)$ và mọi $\rho \in (0, \varepsilon)$, trong đó

$$\varepsilon := \min \left(\frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+1} - \frac{a}{a+1} \right), \frac{r}{a+1}, \frac{s}{2a} \right),$$

ta có

$$B(\bar{y}, \rho a) \subset F(B(\bar{x}, \rho)).$$

Chứng minh. Lấy $a \in (0, c)$, $b \in (\frac{a}{a+1}, \frac{1}{2}(\frac{c}{c+1} + \frac{a}{a+1}))$, và $\rho \in (0, \varepsilon)$. Ta có

$$b + \rho < \frac{c}{c+1} \quad (2.1)$$

và

$$b^{-1}a\rho < b^{-1}a\frac{r}{r+1} < r. \quad (2.2)$$

Chọn $v \in B(\bar{y}, \rho a)$ và $f : \text{Gr}F \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) := \|v - y\|$. Do $\text{Gr}F$ là đóng, ta có thể áp dụng Nguyên lý biến phân Ekeland trong Định lý 1.1 cho hàm f trên tập $\text{Gr}F$ để thu được $(u_b, v_b) \in \text{Gr}F$ sao cho

$$f(u_b, v_b) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) - bd(u_b, v_b), (\bar{x}, \bar{y}) \quad (2.3)$$

và

$$f(u_b, v_b) \leq f(x, y) + bd(u_b, v_b), (x, y) \quad \forall (x, y) \in \text{Gr}F. \quad (2.4)$$

Suy ra

$$\|v_b - v\| \leq \|\bar{y} - v\| - b(\|\bar{x} - u_b\| + \|\bar{y} - v_b\|) \quad (2.5)$$

và

$$||v_b - v|| \leq ||y - v|| + b(||x - u_b|| + ||y - v_b||)$$

với mọi $(x, y) \in \text{Gr}F$. Từ (2.2) và (2.5) ta có

$$||\bar{x} - u_b|| \leq b^{-1}||\bar{y} - v|| < b^{-1}a\rho < r,$$

$$||\bar{y} - v_b|| \leq ||\bar{y} - v|| + ||v - v_b|| \leq 2||\bar{y} - v|| < 2\rho a < s.$$

Từ đó suy ra rằng $(u_b, v_b) \in \text{Gr}F \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)]$. Nếu $v_b = v$ thì

$$b||\bar{x} - u_b|| \leq (1 - b)||\bar{y} - v|| < (1 - b)a\rho < b\rho.$$

Suy ra $u_b \in B(\bar{x}, \rho)$ và $v \in F(B(\bar{x}, \rho))$. Ta khẳng định rằng $v_b = v$ là trường hợp duy nhất có thể xảy ra. Thật vậy, giả sử $v \neq v_b$. Xét hàm $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, với

$$h(x, y) := ||y - v|| + b(||x - u_b|| + ||y - v_b||).$$

Do tính chất (2.4), ta có (u_b, v_b) là điểm cực tiểu của h trên $\text{Gr}F$, hay (u_b, v_b) là điểm cực tiểu toàn cục của hàm $h + \delta_{\text{Gr}F}$.

Áp dụng quy tắc Fermat mở rộng, ta có

$$(0, 0) \in \widehat{\partial}(h(\cdot) + \delta_{\text{Gr}F}(\cdot))(u_b, v_b).$$

Sử dụng sự kiện h là Lipschitz và $\delta_{\text{Gr}F}$ là nửa liên tục dưới, ta áp dụng Quy tắc tổng mờ (Định lý 1.2) cho dưới vi phân Fréchet. Chọn $\gamma \in (0, \rho)$ sao cho

$$D(u_b, \gamma) \subset B(\bar{x}, r), \quad v \notin D(v_b, \gamma) \subset B(\bar{y}, s).$$

Ta thu được các véctơ

$$(u_\gamma^1, v_\gamma^1) \in D(u_b, \gamma) \times D(v_b, \gamma) \subset B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)$$

và

$$(u_\gamma^2, v_\gamma^2) \in [D(u_b, \gamma) \times D(v_b, \gamma)] \cap \text{Gr}F \subset [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)] \cap \text{Gr}F$$

thỏa mãn điều kiện

$$(0, 0) \in \widehat{\partial}h(u_\gamma^1, v_\gamma^1) + \widehat{\partial}\delta_{\text{Gr}F}(u_\gamma^2, v_\gamma^2) + \rho(D_{X^*} \times D_{Y^*}).$$

Vì h là tổng của ba hàm lồi, Lipschitz trên $X \times Y$, nên $\widehat{\partial}h$ trùng với tổng của các dưới vi phân theo nghĩa Giải tích lồi của ba hàm lồi đó. Do $v \neq v_\gamma^1 \in D(v_b, \gamma)$, ta có

$$\begin{aligned} (0, 0) \in \{0\} \times S_{Y^*} + b(D_{X^*} \times \{0\} + \{0\} \times D_{Y^*}) \\ + \widehat{N}(\text{Gr}F, (u_\gamma^2, v_\gamma^2)) + \rho(D_{X^*} \times D_{Y^*}). \end{aligned}$$

Chọn $y_1^* \in S_{Y^*}$, $y_2^*, y_3^* \in D_{Y^*}$, $x_1^*, x_2^* \in D_{X^*}$ sao cho

$$(-bx_1^* - \rho x_2^*, -y_1^* - by_2^* - \rho y_3^*) \in \widehat{N}(\text{Gr}F, (u_\gamma^2, v_\gamma^2))$$

và

$$-bx_1^* - \rho x_2^* \in \widehat{D}^*F(u_\gamma^2, v_\gamma^2)(y_1^* + by_2^* + \rho y_3^*).$$

Sử dụng tính chất $(u_\gamma^2, v_\gamma^2) \in \text{Gr}F \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)]$, ta được

$$\begin{aligned} b + \rho &\geq ||-bx_1^* - \rho x_2^*|| \geq c||y_1^* + by_2^* + \rho y_3^*|| \\ &\geq c(||y_1^*|| - b||y_2^*|| - \rho||y_3^*||) \\ &\geq c(1 - b - \rho). \end{aligned}$$

Điều đó mâu thuẫn với bất đẳng thức $(1 - b - \rho)^{-1}(b + \rho) < c$.
Chứng minh kết thúc. \square

Có thể phát biểu phần kết luận của Định lý 2.1 cho một lân cận của (\bar{x}, \bar{y}) , nếu thay đổi chút ít các hằng số được xét. Nhận xét thêm rằng, thay cho việc đòi hỏi $\text{Gr}F$ là đóng, ta chỉ cần đòi hỏi $\text{Gr}F$ là đóng địa phương tại (\bar{x}, \bar{y}) .

Định lý 2.2. *Cho X, Y là các không gian Asplund, $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị, và $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr}F$, sao cho $\text{Gr}F$ đóng địa phương tại (\bar{x}, \bar{y}) . Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

- (i) *Tồn tại $r > 0, s > 0$ và $c > 0$ sao cho với mọi $(x, y) \in \text{Gr}F \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)]$, và mọi $y^* \in \widehat{D}^*F(x, y)(y^*)$, ta có*

$$c||y^*|| \leq ||x^*||.$$

- (ii) *Tồn tại $\alpha > 0, \beta > 0, c > 0$ và $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $(x, y) \in \text{Gr}F \cap [B(\bar{x}, \alpha) \times B(\bar{y}, \beta)]$, với mọi $a \in [0, c]$, và với mọi $\rho \in (0, \varepsilon]$, ta có*

$$B(y, \rho a) \subset F(B(x, \rho)).$$

Nhận xét 2.1. Từ chứng minh của Định lý 2.1, ta có thể thấy rằng giả thiết các không gian X và Y là Asplund được dùng

chỉ để áp dụng Quy tắc tổng mờ cho dưới vi phân Fréchet. Vì thế, các kết quả vẫn đúng nếu ta xét các loại dưới vi phân khác cũng thỏa mãn các phép tính tương tự trong lớp các không gian Banach tương ứng. Tất nhiên, trong trường hợp dưới vi phân thỏa mãn các quy tắc tính toán chính xác, các kết quả là đúng.

Nhận xét 2.2. Nếu ta thêm vào giả thiết $\text{Gr}F$ là lồi thì ta không cần X, Y là các không gian Asplund. Trong trường hợp này, $\delta_{\text{Gr}F}$ là hàm lồi, thay vì quy tắc tổng mờ cho dưới vi phân Fréchet trên không gian Asplund, và ta có thể sử dụng Quy tắc tổng cho dưới vi phân của các hàm lồi (Định lý Moreau-Rockafellar).

2.2 Sự cần thiết của tính đóng

Liên quan đến các giả thiết và kết luận của Định lý 2.1, ta có thể đặt ra câu hỏi: *Điều kiện “ $\text{Gr}F$ là đóng” có thực sự cần thiết hay không?*

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng giả thiết về tính đóng của $\text{Gr}F$ là thực sự cần thiết.

Ví dụ 2.1. Xét ánh xạ $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ cho bởi $F(x) = \{\frac{1}{2}x\}$. Đặt $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ và để ý rằng

$$\widehat{D}^*F(x, y)(y^*) = (\nabla F(x))^*(y^*) = \left\{ \frac{1}{2}y^* \right\}.$$

Do đó, điều kiện (1) thỏa mãn với $c \in (0, \frac{1}{2})$ được chọn tùy ý. Đặt

$$\Sigma = \text{Gr}F \setminus \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{2k} \right) \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

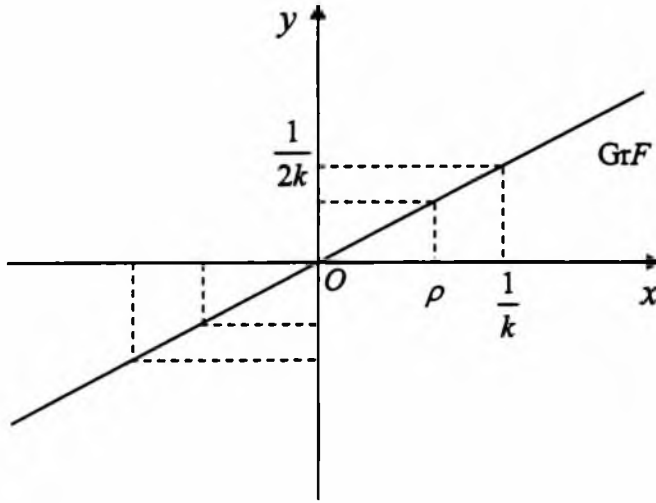
và

$$\tilde{F}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \Sigma\} \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

ta có

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{nếu } x \notin \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\} \\ \emptyset & \text{nếu } x \in \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Rõ ràng $\text{Gr}\tilde{F}$ không đóng. Vì $\widehat{D}^*\tilde{F}(x, y)(y^*) = \widehat{D}^*F(x, y)(y^*)$ với mọi $(x, y) \in \text{Gr}\tilde{F}$ và với mọi $y^* \in \mathbb{R}$, nên giả thiết (ii) của Định lý 2.1 thỏa mãn cho ánh xạ \tilde{F} . Do ảnh của một lân cận bất kỳ của $\bar{x} = 0$ qua ánh xạ \tilde{F} không là lân cận của $\bar{y} = 0$, kết luận của Định lý 2.1 không còn đúng. Điều đó không mâu thuẫn với Định lý 2.1, vì giả thiết đồ thị đóng không được thỏa mãn cho ánh xạ \tilde{F} .



Hình 2.1: Ánh xạ đa trị không đóng địa phương

2.3 Trường hợp ánh xạ có tham số

Ta sẽ chỉ ra rằng có thể sử dụng Định lý 2.1 về tính mở và kỹ thuật chứng minh của định lý đó để đưa ra điều kiện đủ cho tính mở của các ánh xạ đa trị có tham số.

Định lý 2.3. Cho X, Y là các không gian Asplund, P là không gian tôpô và $F : X \times P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị. Kí hiệu $F_p(\cdot) := F(\cdot, p)$ và lấy $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \in X \times Y \times P$ sao cho $\bar{y} \in F(\bar{x}, \bar{p})$. Giả sử rằng

- (i) Tồn tại $U_1 \in \mathcal{V}(\bar{y})$ sao cho $\text{Gr}F_p$ là đóng với mỗi $p \in U_1$;
- (ii) $F(\bar{x}, \cdot)$ là nửa liên tục bên trong tại (\bar{p}, \bar{y}) ;
- (iii) Tồn tại các hằng số $r > 0, s > 0, c > 0$ và lân cận $U_2 \in \mathcal{V}(\bar{p})$ sao cho với mọi $p \in U_2$, với mọi $(x, y) \in \text{Gr}F_p \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)]$, với mọi $y^* \in Y^*$ và $x^* \in \widehat{D}^*F_p(x, y)(y^*)$, bất đẳng thức (1) nghiệm đúng.

Khi đó, với mọi $a \in (0, c)$ và $\rho \in (0, \varepsilon)$ với

$$\varepsilon := \min \left(\frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+1} - \frac{a}{a+1} \right), \frac{r}{a+1}, \frac{2s}{3a} \right),$$

tồn tại $U \in \mathcal{V}(\bar{p})$ sao cho với mọi $p \in U$

$$B \left(\bar{y}, \frac{a\rho}{2} \right) \subset F_p(B(\bar{x}, \rho)). \quad (2.6)$$

Chứng minh. Như trong chứng minh của Định lý 2.1, ta lấy $a \in (0, c)$, $b \in (\frac{a}{a+1}, \frac{1}{2}(\frac{c}{c+1} + \frac{a}{a+1}))$, và $\rho \in (0, \varepsilon)$. Sử dụng tính chất nửa liên tục bên trong của $F(\bar{x}, \cdot)$ tại (\bar{p}, \bar{y}) , ta tìm được $U_3 \in \mathcal{V}(\bar{p})$ sao cho với mọi $p \in U_3$, $F(\bar{x}, p) \cap B(\bar{y}, \frac{a\rho}{2}) \neq \emptyset$.

Đặt $U := U_1 \cap U_2 \cap U_3$ và cố định $p \in U$. Khi đó, tồn tại $y' \in F_p(\bar{x})$ sao cho $\|y - y'\| < \frac{a\rho}{2}$.

Lấy $v \in B(\bar{y}, \frac{a\rho}{2}) \subset B(y', a\rho)$. Áp dụng Nguyên lý biến phân Ekeland (Định lý 1.1) cho hàm $f : \text{Gr}F_p \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $f(x, y) := \|v - y\|$ ta chọn được $(u_b, v_b) \in \text{Gr}F_p$ sao cho

$$\|v_b - v\| \leq \|y' - v\| - b(\|\bar{x} - u_b\| + \|y' - v_b\|)$$

và

$$\|v_b - v\| \leq \|y - v\| + b(\|x - u_b\| + \|y - v_b\|)$$

với mọi $(x, y) \in \text{Gr}F_p$. Để ý rằng

$$\|\bar{x} - u_b\| \leq b^{-1}\|y' - v\| < b^{-1}a\rho < (a + 1)\rho < r$$

và

$$\begin{aligned} \|\bar{y} - v_b\| &\leq \|\bar{y} - v\| + \|v - v_b\| \leq 2^{-1}a\rho + \|y' - v\| \\ &\leq 2^{-1}a\rho + \|y' - \bar{y}\| + \|\bar{y} - v\| < 2^{-1}3a\rho < s. \end{aligned}$$

Tiếp theo, lập luận tương tự như trong chứng minh Định lý 2.1 ta thu được bao hàm thức (2.6). \square

Với giả thiết tương tự như trên, ta có thể dùng ngay Định lý 2.1 để thu được một đánh giá yếu hơn không đáng kể. Cụ thể, lấy $a \in (0, c)$ và đặt $\varepsilon = \min(\frac{1}{2}(\frac{c}{c+1} - \frac{a}{a+1}), \frac{r}{a+1}, \frac{s}{3a})$. Khi đó, với mọi $\rho \in (0, \varepsilon)$ bao hàm thức (2.6) nghiệm đúng. Thật vậy, sử dụng tính chất nửa liên tục bên trong của $F(\bar{x}, \cdot)$ tại (\bar{p}, \bar{y}) , ta tìm được $U_3 \in \mathcal{V}(\bar{p})$ như trên sao cho với mọi $p \in U_3$, $F(\bar{x}, p) \cap B(\bar{y}, \frac{a\rho}{2}) \neq \emptyset$. Ta lại chọn $U := U_1 \cap U_2 \cap U_3$ và cố định $p \in U$. Khi đó, tồn tại $y' \in F_p(\bar{x})$ sao cho $\|y' - \bar{y}\| < \frac{a\rho}{2}$.

Suy ra $B(\bar{y}, \frac{a\rho}{2}) \subset B(y', a\rho)$. Đặt $s' := \frac{2}{3}s$. Ta có $B(y', s') \subset B(\bar{y}, \frac{2s}{3} + \frac{a\rho}{2}) \subset B(\bar{y}, s)$ và $\rho \in (0, \min(\frac{1}{2}(\frac{c}{c+1} - \frac{a}{a+1}), \frac{r}{a+1}, \frac{s'}{2a}))$. Bây giờ, áp dụng Định lý 2.1 cho F_p , s' và (\bar{x}, y') thay cho F, s và (\bar{x}, \bar{y}) , ta được $B(y', a\rho) \subset F_p(B(\bar{x}, \rho))$. Vì $B(\bar{y}, \frac{a\rho}{2}) \subset B(y', a\rho)$, nên từ bao hàm thức cuối ta suy ra (2.6).

Một sự kiện thú vị khác là ta có thể sử dụng Định lý 2.3 để chứng minh Định lý 2.1.

Thật vậy, giả sử rằng các giả thiết của Định lý 2.1 thỏa mãn. Lấy $P = Y$ và xây dựng ánh xạ đa trị

$$\tilde{F} : X \times Y \rightrightarrows Y, \quad \tilde{F}(x, y) := F(x) - y.$$

Kí hiệu $\tilde{F}_y(\cdot) := \tilde{F}(\cdot, y)$. Chú ý rằng $\text{Gr}\tilde{F}_y = \text{Gr}F + (0, -y)$ với mọi $y \in Y$. Vì $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Gr}F$ nên ta có $(\bar{x}, \bar{y}, 0) \in \text{Gr}\tilde{F}$. Do tính đóng của $\text{Gr}F$, giả thiết (i) của Định lý 2.3 thỏa mãn với $U_1 := Y$. Cũng như vậy, $\tilde{F}(\bar{x}, \cdot) := F(\bar{x}) - (\cdot)$ là nửa liên tục bên trong tại $(\bar{y}, 0)$.

Để kiểm tra điều kiện (iii) trong Định lý 2.3, ta lấy $r > 0, c > 0, s > 0$ sao cho với mọi $(x, u) \in \text{Gr}F \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)]$ và mọi $y^* \in Y^*$, $x^* \in \widehat{D}^*F(x, u)(y^*)$ thì quan hệ $c\|y^*\| \leq \|x^*\|$ là đúng. Đặt $U_2 := B(\bar{y}, \frac{s}{4})$ và lấy $y \in U_2$. Khi đó, với mọi $(x, z) \in \text{Gr}\tilde{F}_y \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)]$, ta có

$$(x, z+y) \in \text{Gr}F \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, \frac{3s}{4})] \subset \text{Gr}F \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)].$$

Thêm vào đó, với mọi $y^* \in Y^*$ và $x^* \in \widehat{D}^*\tilde{F}_y(x, z)(y^*)$, ta có

$$(x^*, -y^*) \in \widehat{N}(\text{Gr}\tilde{F}_y, (x, z)) = \widehat{N}(\text{Gr}F, (z+y)).$$

Do đó bất đẳng thức $c||y^*|| \leq ||x^*||$ nghiệm đúng. Vậy ta có thể áp dụng Định lý 2.3 cho \tilde{F} , $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ và $s' := \frac{3s}{4}$ để chứng minh rằng với mọi $a \in (0, c)$ và mọi $\rho \in (0, \min(\frac{1}{2}(\frac{c}{c+1} - \frac{a}{a+1}), \frac{r}{a+1}, \frac{2s'}{3a}))$, tồn tại $U \in \mathcal{V}(\bar{y})$ sao cho với mọi $y \in U$ ta có

$$B(0, \frac{a\rho}{2}) \subset \tilde{F}_y(B(\bar{x}, \rho)) = F(B(\bar{x}, \rho)) - y.$$

Điều này tương đương với việc nói rằng mọi $a \in (0, c)$ và mọi $\rho \in (0, \min((\frac{c}{c+1} - \frac{a}{a+1}), \frac{r}{a+1}, \frac{2s'}{3a}))$, tồn tại $U \in \mathcal{V}(\bar{y})$ sao cho

$$\bigcup_{y \in U} B(y, \frac{a\rho}{2}) \subset F(B(\bar{x}, \rho)).$$

Hơn nữa, như trong chứng minh của Định lý 2.3, ta thấy rằng có thể lấy $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$, trong đó $U_3 \in \mathcal{V}(\bar{y})$ được chọn sao cho

$$\tilde{F}(\bar{x}, y) \cap B(0, \frac{a\rho}{2}) \neq \emptyset \quad \text{với mọi } y \in U_3. \quad (2.7)$$

Lấy $U_3 := B(\bar{y}, \frac{a\rho}{2})$ và để ý rằng $\bar{y} \in B(y, \frac{a\rho}{2}) \cap F(\bar{x})$ với mọi $y \in U_3$. Do đó điều kiện (2.7) được thỏa mãn. Ngoài ra, vì $\frac{a\rho}{2} < \frac{s}{4}$ nên $U = B(\bar{y}, \frac{a\rho}{2})$ và ta có

$$B(\bar{y}, a\rho) = \bigcup_{y \in U} B(y, \frac{a\rho}{2}) \subset F(B(\bar{x}, \rho)).$$

Chương 3

Các định lý hàm ẩn

Sử dụng Định lý 2.3 về tính mở ở cho ánh xạ đa trị có tham số, trong chương này ta sẽ đưa ra các kết quả liên quan đến hàm ẩn đa trị.

3.1 Tính nửa liên tục dưới của hàm ẩn đa trị

Cho ánh xạ đa trị $F : X \times P \rightrightarrows Y$. Ta định nghĩa hàm ẩn đa trị $H : P \times Y \rightrightarrows X$ theo công thức sau:

$$H(p, y) = \{x \in X \mid y \in F(x, p)\}. \quad (3.1)$$

Kí hiệu $H_p(\cdot) := H(p, \cdot)$, ta có $H_p = F_p^{-1}$ với mọi $p \in P$. Theo lý thuyết cổ điển, ta có thể định nghĩa hàm ẩn $G : P \rightrightarrows X$ như là ánh xạ hạn chế $H(\cdot, 0) : P \rightrightarrows X$ của ánh xạ H . Như vậy, bên cạnh H , ta xét hàm ẩn đa trị G được xác định bởi công thức

$$G(p) = \{x \in X \mid 0 \in F(x, p)\}.$$

Định lý hàm ẩn đa trị sau đây chỉ ra rằng một số tính chất

của ánh xạ đa trị F có thể chuyển sang cho H và G .

Định lý 3.1. *Cho X, Y là các không gian Apsslund, P là không gian tôpô, và $F : X \times P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị sao cho $\bar{y} \in F(\bar{x}, \bar{p})$. Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 2.3 thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $U \in \mathcal{V}(\bar{p}), \delta > 0$ và $\rho > 0$ sao cho với mọi $p \in U$ và $y \in B(\bar{y}, \delta)$, ánh xạ đa trị $(p, y) \mapsto H(p, y) \cap B(\bar{x}, \rho)$ nhận giá trị khác rỗng. Nói riêng, nếu $\bar{y} := 0$ thì ánh xạ đa trị $p \mapsto G(p) \cap B(\bar{x}, \rho)$ nhận giá trị khác rỗng với mọi $p \in U$.*

Nếu giả thiết sau đây thỏa mãn

(iv) *Tồn tại $U_3 \in \mathcal{V}(\bar{p})$ và $\alpha > 0$ sao cho $F(x, \cdot)$ là nửa liên tục dưới ở trên U_3 với mọi $x \in B(\bar{x}, \alpha)$,*

thì tồn tại $U_0 \in \mathcal{V}(\bar{p}), \delta_0 > 0$ và $\rho_0 > 0$ sao cho hàm ẩn $(p, y) \mapsto H(p, y) \cap B(\bar{x}, \rho_0)$ nửa liên tục dưới trên $U_0 \times B(\bar{y}, \delta_0)$. Nói riêng, nếu $\bar{y} = 0$ thì hàm ẩn $p \mapsto G(p) \cap B(\bar{x}, \rho_0)$ là nửa liên tục dưới trên U_0 .

Chứng minh. Lấy $a \in (0, c)$ và $\rho \in (0, \min(\varepsilon, r))$. Theo Định lý 2.3, ta chọn được $U \in \mathcal{V}(\bar{p})$ sao cho

$$B(\bar{y}, 2^{-1}a\rho) \subset F_p(B(\bar{x}, \rho)) \quad (\forall p \in U). \quad (3.2)$$

Đặt $\delta := 2^{-1}a\rho$. Do (3.2), với mỗi $(p, y) \in U \times B(\bar{y}, \delta)$ tồn tại $x \in B(\bar{x}, \rho)$ sao cho $y \in F_p(x)$. Từ công thức (3.1) suy ra $x \in H(p, y)$. Do đó $x \in H(p, y) \cap B(\bar{x}, \rho)$. Như vậy, ta đã chứng tỏ ánh xạ đa trị $(p, y) \mapsto H(p, y) \cap B(\bar{x}, \rho)$ nhận giá trị khác rỗng với mọi $(p, y) \in U \times B(\bar{y}, \delta)$.

Để chứng minh kết luận thứ hai của định lý, ta lấy $a \in (0, c)$ và $\rho \in (0, \min(\varepsilon, r, \alpha))$. Áp dụng Định lý 2.3, ta chọn được $U_3 \in \mathcal{V}(\bar{p})$ sao cho (3.2) nghiệm đúng, tức là $B(\bar{y}, 2^{-1}a\rho) \subset F_p(B(\bar{x}, \rho))$ với mọi $p \in U_3$.

Lấy $U_0 := U \cap U_3$, $\delta_0 := 2^{-1}a\rho$ và $\rho_0 := \rho$. Với mỗi $(p, y) \in U_0 \times B(\bar{y}, \delta_0)$, do (3.2) tồn tại $x \in H(p, y) \cap B(\bar{x}, \rho_0)$. Để chứng minh rằng ánh xạ đa trị $(p, y) \mapsto H(p, y) \cap B(\bar{x}, \rho_0)$ là nửa liên tục dưới ở trên $U_0 \times B(\bar{y}, \delta_0)$, ta phải chứng minh với mọi $\theta > 0$ nhỏ tùy ý, tồn tại $U' \in \mathcal{V}(\bar{p})$ và $\delta' > 0$ sao cho với mọi $(p', y') \in U' \times B(y, \delta')$ thì

$$H(p', y') \cap B(\bar{x}, \rho_0) \cap B(x, \theta) \neq \emptyset.$$

Thật vậy, ta chọn $\beta \in (0, \theta)$ sao cho $B(x, \beta) \subset B(x, \theta) \subset B(\bar{x}, \rho)$ và $\gamma > 0$ đủ bé sao cho $B(y, \gamma) \subset B(\bar{y}, \delta_0)$. Lập luận tương tự như ở phần đầu chứng minh của định lý, lấy (x, p, y) thay cho $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y})$, ta tìm được $U' \in \mathcal{V}(\bar{p})$, $\rho' \in (0, \beta)$ và $\delta' > 0$ sao cho $H(p', y') \cap B(x, \rho') \neq \emptyset$ với mọi $(p', y') \in U' \times B(y, \delta')$. Vì $H(p', y') \cap B(x, \rho') \subset H(p', y') \cap B(x, \beta) \subset H(p', y') \cap B(\bar{x}, \rho_0) \cap B(x, \theta) = H[(p', y') \cap B(\bar{x}, \rho_0)] \cap B(x, \theta)$. Do đó ta có $H(p', y') \cap B(\bar{x}, \rho_0) \cap B(x, \theta) \neq \emptyset$ với mọi $(p', y') \in U' \times B(y, \delta')$. Chứng minh kết thúc. \square

Nhận xét 3.1. Định lý 3.1 mở rộng Định lý 3.1 trong [13]. Để ý rằng, cách tiếp cận mới của chúng ta đã cho phép loại bỏ hoàn toàn giả thiết (A_2) của [13]. Trong khi đó, giả thiết (A_3) của [13] có thể làm yếu đi.

3.2 Tính mêtric chính quy của hàm ẩn đa trị

Định lý sau chỉ ra điều kiện đủ cho tính mêtric chính quy của hàm ẩn đa trị.

Định lý 3.2. Cho X, Y là các không gian Apseud và $F : X \times P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị sao cho $\bar{y} \in F(\bar{x}, \bar{p})$. Giả sử rằng

- (i) Tồn tại $U_1 \in \mathcal{V}(\bar{p})$ sao cho với mọi $p \in U_1$, $\text{Gr}F_p$ là đóng;
- (ii) F nửa liên tục bên trong tại (\bar{x}, \bar{p}) ;
- (iii) Tồn tại $r, s, c > 0$ và $U_2 \in \mathcal{V}(\bar{p})$ sao cho với mọi $p \in U_2$, mọi $(x, y) \in \text{Gr}F_p \cap [B(\bar{x}, r) \times B(\bar{y}, s)]$ và mọi $y^* \in Y^*, x^* \in \widehat{D}^*F_p(x, y)(y^*)$, $c\|y^*\| \leq \|x^*\|$.

Khi đó, những khẳng định sau là đúng:

- (a) Với mọi $a \in (0, c)$, tồn tại $U \in \mathcal{V}(\bar{p})$, $\delta > 0$ và $\tau > 0$ sao cho với mọi $p \in U$, $y \in B(\bar{y}, \delta)$ và $x \in B(\bar{x}, \tau)$, ta có

$$d(x, H(p, y)) \leq \frac{1}{a}d(y, F(x, p)). \quad (3.3)$$

Suy ra, nếu $\bar{y} = 0$ thì với mọi $p \in U$ và $x \in B(\bar{x}, \tau)$ ta có

$$d(x, G(p)) \leq \frac{1}{a}d(0, F(x, p)). \quad (3.4)$$

- (b) Ký hiệu $H_y(.) := H(., y)$. Nếu P là không gian metric, thì với mỗi $a \in (0, c)$ tồn tại $\gamma_0 > 0, \delta_0 > 0, \tau_0 > 0$ và $l := 1 + \frac{1}{a}$ sao cho với mọi $p \in B(\bar{p}, \gamma_0), y \in B(\bar{y}, \delta_0)$ và $x \in B(\bar{x}, \tau_0)$, ta có

$$d((p, x), \text{Gr}H_y) \leq ld((x, p, y), \text{Gr}F); \quad (3.5)$$

vì thế, nếu $\bar{y} = 0$ thì với mọi $p \in B(\bar{p}, \gamma_0)$ và $x \in B(\bar{x}, \tau_0)$, ta có

$$d((p, x), \text{Gr}G) \leq ld((x, p, 0), \text{Gr}F). \quad (3.6)$$

Chứng minh.

- (a) Lấy $a \in (0, c)$ và $\rho \in (0, \min(\frac{1}{2}(\frac{c}{c+1} - \frac{a}{a+1}, \frac{1}{2(a+1)}, \frac{s}{4a})))$. Sử dụng tính chất nửa liên tục bên trong của F tại (\bar{x}, \bar{p}) , ta tìm

được $V_0 \in \mathcal{V}(\bar{p})$ và $\nu > 0$ sao cho

$$F(x, p) \cap B(\bar{y}, \frac{a\rho}{2}) \neq \emptyset \text{ với mọi } (x, p) \in B(\bar{x}, \nu) \times U_0. \quad (3.7)$$

Đặt $U := U_0 \cap U_1 \cap U_2$, $\tau := \min(\nu, \frac{r}{2})$, $\delta := \frac{a\rho}{2}$. Lấy $(x, p, y) \in B(\bar{x}, \tau) \times U \times B(\bar{y}, \delta)$. Nếu $y \in F(x, p)$ thì (3.3) là tầm thường. Giả sử $y \notin F(x, p)$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được $y_\varepsilon \in F(x, p)$ sao cho

$$\|y_\varepsilon - y\| < d(y, F(x, p)) + \varepsilon. \quad (3.8)$$

Thật vậy, đặt $\alpha = d(y, F(x, p))$. Ta có $\alpha \in \mathbb{R}_+$ và $\|y - y'\| \geq \alpha$ với mọi $y' \in F(x, p)$.

Đặt $\Omega = \{\|y - y'\|, y' \in F(x, p)\}$. Theo định nghĩa infimum, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một phần tử thuộc Ω sao cho $\|y - y'\| \in [\alpha, \alpha + \varepsilon)$. Nếu phần tử đó là $\|y - y_\varepsilon\|$, thì $y_\varepsilon \in F(x, p)$. Điều này được giải thích như sau.

Vì $\alpha + \varepsilon$ không là cận dưới của Ω nên tồn tại $\|y - y_\varepsilon\| \in \Omega$ sao cho $\alpha \leq \|y - y_\varepsilon\| < \alpha + \varepsilon$. Do đó (3.8) đúng.

Do (3.7) và do cách chọn y , ta có $d(y, F(x, p)) < a\rho$. Ta có thể lấy $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để $d(y, F(x, p)) + \varepsilon < a\rho$. Từ (3.8) ta có $y \in B(y_\varepsilon, d(y, F(x, p)) + \varepsilon) \subset B(y_\varepsilon, a\rho)$. Hơn nữa, $B(x, 2^{-1}r) \subset B(\bar{x}, r)$ và

$$B(y_\varepsilon, 2^{-1}s) \subset B(y, 2^{-1}s + a\rho) \subset B(\bar{y}, 2^{-1}s + a\rho + 2^{-1}a\rho) \subset B(\bar{y}, s).$$

Vì vậy ta có thể áp dụng Định lý 2.1 cho $(x, y_\varepsilon) \in \text{Gr}F_p$, với $r_0 = 2^{-1}r$, $s_0 = 2^{-1}s$ và $\rho_0 = \frac{1}{a}(d(y, F(x, p)) + \varepsilon) < \rho$, để suy ra rằng $B(y_\varepsilon, a\rho_0) \subset F_p(B(x, \rho_0))$. Ta có thể tìm được $\tilde{x} \in B(x, \rho_0)$

sao cho $y \in F_p(\tilde{x})$, hay $\tilde{x} \in H(p, y)$. Suy ra

$$d(x, H(p, y)) \leq \|x - \tilde{x}\| < \frac{1}{a}(d(y, F(x, p)) + \varepsilon)$$

Cho $\varepsilon \rightarrow 0$ ta được (3.3) với $k := \frac{1}{a}$.

(b) Chứng minh tương tự (a), nhưng có một số điểm khác biệt quan trọng.

Như trên, ta lấy $a \in (0, c)$ và $\rho \in (0, \min(\frac{c}{c+1} - \frac{a}{a+1}, \frac{r}{4(a+1)}))$. Ta lại sử dụng tính chất nửa liên tục bên trong của F tại (\bar{x}, \bar{p}) và tìm được lân cận U_0 của \bar{p} sao cho (3.7) đúng với mọi $(x, p) \in B(\bar{x}, \nu) \times U_0$.

Nếu P là không gian mêtric, ta có thể tìm được $\gamma > 0$ sao cho $B(\bar{p}, \gamma) \subset U_0 \cap U_1 \cap U_2$. Lấy $\delta_0 := \min(\frac{a\rho}{2}, \frac{\gamma}{6})$, $\tau_0 := \min(\frac{\gamma}{6}, \nu, \frac{r}{4})$, $\gamma_0 := \frac{\gamma}{3}$ và chọn $(x, p, y) \in B(\bar{x}, \tau_0) \times B(\bar{p}, \gamma_0) \times B(\bar{y}, \delta_0)$. Khi đó ta có

$$d((x, p, y), \text{Gr}F) \leq \|x - \bar{x}\| + d(p, \bar{p}) + \|y - \bar{y}\| < \frac{\gamma}{6} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma}{6} = \frac{2\gamma}{3}$$

và

$$d((x, p, y), \text{Gr}F) < d(y, F(x, p)) < a\rho.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $y \notin F(x, p)$. Với mọi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ mà

$$d((x, p, y), \text{Gr}F) + \varepsilon < \min\left(a\rho, \frac{2\gamma}{3}\right),$$

ta có thể tìm được $(x_\varepsilon, p_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \text{Gr}F$ thỏa mãn

$$\max(\|y_\varepsilon - y\|, d(p_\varepsilon, p)) \leq \|y_\varepsilon - y\| + \|x_\varepsilon - x\| + d(p_\varepsilon, p) \quad (3.9)$$

$$< d((x, p, y), \text{Gr}F) + \varepsilon.$$

Suy ra

$$p_\varepsilon \in B\left(\rho, \frac{2\gamma}{3}\right) \subset B(\bar{p}, \gamma),$$

$$y \in B(y_\varepsilon, d((x, p, y), \text{Gr}F) + \varepsilon) \subset B(y_\varepsilon, a\rho), \quad (3.10)$$

và

$$B(x_\varepsilon, 4^{-1}r) \subset B(x, 4^{-1}r + a\rho) \subset B(x, 2^{-1}r) \subset B(\bar{x}, r),$$

$$B(y_\varepsilon, 2^{-1}s) \subset B(\bar{y}, s).$$

Từ đó ta có thể áp dụng Định lý 2.1 cho $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \text{Gr}F_p$ với $r' := 4^{-1}r, s' := 2^{-1}s$ và $\rho' := \frac{1}{a}(d((x, p, y), \text{Gr}F) + \varepsilon) < \rho$ và thu được $B(y_\varepsilon, a\rho') \subset F_{p_\varepsilon}(B(x_\varepsilon, \rho'))$. Từ (3.10) ta có sự tồn tại $\tilde{x} \in B(x_\varepsilon, \rho')$ sao cho $y \in F_{p_\varepsilon}(\tilde{x})$, hay $(\tilde{x}, p_\varepsilon) \in \text{Gr}H_y$.

Do đó, từ (3.9) ta suy ra

$$\begin{aligned} d((p, x), \text{Gr}H_y) &\leq \|\tilde{x} - x\| + d(p_\varepsilon, p) \\ &\leq \|\tilde{x} - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x\| + d(p_\varepsilon, p) \\ &< \frac{1}{a}(d((x, p, y), \text{Gr}F) + \varepsilon) + d((x, p, y), \text{Gr}F) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Cho $\varepsilon \rightarrow 0$, ta được (3.5) với $l = \frac{1}{a} + 1$. □

Nhận xét 3.2. Định lý 3.1 mở rộng Định lý 3.2 trong [13]. Một vài giả thiết đã được làm yếu.

3.3 Đối đạo hàm của hàm ẩn đa trị

Kết quả tiếp theo trình bày một công thức đối đạo hàm của G . Ta có thể xem công thức này là sự mở rộng (trong ngôn ngữ của không gian đối ngẫu và toán tử liên hợp) công thức tính đạo hàm của hàm ẩn trong định lý hàm ẩn cổ điển. Công thức này đã được đưa ra trong [12, Proposition 3.8].

Định lý 3.3. *Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 3.2 thỏa mãn với $\bar{y} = 0$ và P là không gian Asplund. Khi đó, tồn tại $\gamma > 0$ và $\tau > 0$ sao cho với mọi $(x, p) \in B(\bar{p}, \gamma) \times B(\bar{x}, \rho)$ mà $x \in G(p)$ và mọi $x^* \in X^*$, bao hàm thức sau cho đối đạo hàm Fréchet là đúng :*

$$\widehat{D}^*G(p, x)(x^*) \supset \bigcup_{y^* \in Y^*} \{p^* \in P^* | (-x^*, p^*) \in \widehat{D}^*F(x, p, 0)(y^*)\} \quad (3.11)$$

Hơn nữa, nếu $\text{Gr}F$ đóng thì với mọi $\varepsilon > 0$ và mọi $x^* \in X^*, p^* \in \widehat{D}^*G(p, x)(x^*)$, tồn tại $(x_\varepsilon, p_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \text{Gr}F$ và $(x_\varepsilon^*, p_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*) \in X^* \times P^* \times Y^*$ sao cho

$$\|x_\varepsilon - x\| < \varepsilon, \quad \|p_\varepsilon - p\| < \varepsilon, \quad \|y_\varepsilon\| < \varepsilon,$$

$$(-x_\varepsilon^*, p_\varepsilon^*) \in \widehat{D}^*F(x_\varepsilon, p_\varepsilon, y_\varepsilon)(y_\varepsilon^*),$$

$$\|x_\varepsilon^* - x^*\| < \varepsilon, \quad \|p_\varepsilon^* - p^*\| < \varepsilon.$$

Từ đó suy ra nếu F là N -chính quy tại $(x, p, 0)$, tức là $\widehat{D}^*F(x, p, 0) = D_N^*F(x, p, 0)$, thì ta có dấu bằng trong (3.11).

Chứng minh. Lấy $\gamma > 0$ và $\rho > 0$ sao cho, với mọi $p \in B(\bar{p}, \gamma)$ và $x \in B(\bar{x}, \tau)$, bất đẳng thức (3.6) đúng.

Chọn $x \in G(p) \cap B(\bar{x}, \rho)$ và $x^* \in X^*, p^* \in P^*$ sao cho tồn tại $y^* \in Y^*$ để $(-x^*, p^*) \in \widehat{D}^*F(x, p, 0)(y^*)$. Khi đó ta có

$$(-x^*, p^*, -y^*) \in \widehat{N}(\text{Gr}F, (x, p, 0)) = \widehat{\partial}\delta_{\text{Gr}F}(x, p, 0).$$

Dùng mô tả biến phân trơn của dưới gradient Fréchet (Mệnh đề 1.1), ta tìm được $\alpha > 0, \beta > 0, \theta > 0$ và hàm số khả vi Fréchet $s : B(x, \alpha) \times B(p, \beta) \times B(0, \theta) \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{aligned} \nabla s(x, p, 0) &= (-x^*, p^*, -y^*), \\ s(x, p, 0) &= \delta_{\text{Gr}F}(x, p, 0) = 0, \\ s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}) &\leq \delta_{\text{Gr}F}(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{y}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

với mọi $(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{y}) \in B(x, \alpha) \times B(p, \beta) \times B(0, \theta)$.

Xét hàm số $\tilde{s} : B(p, \beta) \times B(x, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$\tilde{s}(\tilde{p}, \tilde{x}) := s(\tilde{x}, \tilde{p}, 0).$$

Từ (3.12) ta có

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} s(p, x) &= \nabla(\tilde{p}, \tilde{x})s(x, p, 0) = (p^*, -x^*), \\ \tilde{s}(p, x) &= s(x, p, 0) = 0 = \delta_{\text{Gr}F}(p, x), \\ \tilde{s}(\tilde{p}, \tilde{x}) &= s(\tilde{x}, \tilde{p}, 0) \leq \delta_{\text{Gr}F}(\tilde{x}, \tilde{p}, 0) = \delta_{\text{Gr}G}(\tilde{p}, \tilde{x}) \end{aligned}$$

với mọi $(\tilde{p}, \tilde{x}) \in B(p, \beta) \times B(x, \alpha)$. Suy ra

$$(p^*, -x^*) \in \widehat{\partial}\delta_{\text{Gr}G}(p, x) = \widehat{N}(\text{Gr}G, (p, x))$$

hay $p^* \in \widehat{D}^*G(p, x)(x^*)$; vậy (3.11) nghiệm đúng.

Để chứng minh khẳng định thứ hai của định lý, ta lấy $\varepsilon > 0$ và $x^* \in X^*, p^* \in \widehat{D}^*G(p, x)(x^*)$. Khi đó, tồn tại $\lambda > 0$ sao cho $(p^*, -x^*) \in \widehat{\partial}[\lambda d((\cdot, \cdot), \text{Gr}G)](p, x)$. Do (3.6), ta tìm được $\tau', \gamma' > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} \lambda d((\tilde{x}, \tilde{p}), \text{Gr}G) &\leq \lambda l(d(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{y}), \text{Gr}F + \|\tilde{y}\|) \\ &\leq \delta_{\text{Gr}F}(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{y}) + \lambda l\|\tilde{y}\| \end{aligned}$$

với mọi $(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{y}) \in B(x, \tau') \times B(p, \gamma') \times Y$. Bây giờ, xét các hàm f, g với $f, g : B(x, \tau') \times B(p, \gamma') \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ xác định bởi

$$f(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{y}) := \delta_{\text{Gr}F}(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{y}) + \lambda l\|\tilde{y}\|,$$

$$g(\tilde{x}, \tilde{p}, \tilde{y}) := \lambda d((\tilde{x}, \tilde{p}), \text{Gr}G).$$

Sử dụng các tính chất $f(x, p, 0) = g(x, p, 0) = 0$ và $f \leq g$, ta thu được

$$(-x^*, p^*, 0) \in \widehat{\partial}g(x, p, 0) \subset \widehat{\partial}f(x, p, 0).$$

Vì $\text{Gr}F$ đóng nên ta có thể áp dụng Quy tắc tổng mờ (Định lý 1.2) cho dưới vi phân Fréchet của f và ε đã chọn để chỉ ra sự tồn tại $(x_\varepsilon, p_\varepsilon, y_\varepsilon) \in X \times P \times Y$ sao cho

$$\begin{aligned} \|(x_\varepsilon, p_\varepsilon, y_\varepsilon) - (x, p, 0)\| &< \varepsilon, \\ \|\delta_{\text{Gr}F}(x_\varepsilon, p_\varepsilon, y_\varepsilon) - \delta_{\text{Gr}F}(x, p, 0)\| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{3.13}$$

và

$$\widehat{\partial}f(x, p, 0) \subset \widehat{\partial}\delta_{\text{Gr}F}(x_\varepsilon, p_\varepsilon, y_\varepsilon) + \{0\} \times \{0\} \times \lambda l D_{Y^*} + \varepsilon (D_{X^*} \times D_{P^*} \times D_{Y^*}).$$

Từ (3.13) ta có $(x_\varepsilon, p_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \text{Gr}F$ và tồn tại $(-x_\varepsilon^*, p_\varepsilon^*, y_\varepsilon^*) \in \widehat{N}(\text{Gr}F, (x_\varepsilon, p_\varepsilon, y_\varepsilon))$ và $z^* \in D_{Y^*}$ sao cho

$$(-x^* + x_\varepsilon^*, p^* - p_\varepsilon^*, -y_\varepsilon^* - \lambda z^*) \in \varepsilon(D_{X^*} \times D_{P^*} \times D_{Y^*}).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

3.4 Tính giả Lipschitz của hàm ẩn đa trị

Định lý sau đây cho thấy tính chất Lipschitz của F được chuyển sang các hàm ẩn H và G như thế nào.

Định lý 3.4. *Giả sử tất cả các giả thiết của Định lý 3.2 thỏa mãn. Hơn nữa, giả sử F giả Lipschitz ứng với p đều theo x quanh $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{y})$, nghĩa là tồn tại $\delta_3, \tau_3, L > 0$ và $U_3 \in \mathcal{V}(\bar{p})$ sao cho với mọi $p_1, p_2 \in U_3$ ta có*

$$F(x, p_2) \cap B(\bar{y}, \delta_3) \subset F(x, p_1) + Ld(p_1, p_2)D_Y. \quad (3.14)$$

Khi đó, với mọi $a \in (0, c)$ tồn tại $\bar{\delta}, \bar{\tau} > 0$ và $\bar{U} \in \mathcal{V}(\bar{p})$ sao cho với mọi $y \in B(\bar{y}, \bar{\delta})$ và mọi $p_1, p_2 \in \bar{U}$,

$$H(p_2, y) \cap B(\bar{x}, \bar{\tau}) \subset H(p_1, y) + \frac{L}{a}d(p_1, p_2)D_X,$$

nghĩa là H giả Lipschitz ứng với p đều theo $y \in B(\bar{y}, \bar{\delta})$ với môđun $\frac{L}{a}$. Nói riêng, nếu $\bar{y} = 0$ thì hàm ẩn G là giả Lipschitz với cùng môđun.

Chứng minh. Cố định $a \in (0, c)$, lấy $\bar{\delta} := \min(\delta, \delta_3), \bar{\tau} := \min(\tau, \tau_3), \bar{U} = U \cap U_3$, với δ, τ và U đã đưa ra ở Định lý 3.2 (a). Ta chọn $y \in B(\bar{y}, \bar{\delta}), p_1, p_2 \in \bar{U}$ và $x \in B(\bar{x}, \bar{\tau}) \cap H(p_2, y)$. Khi

đó, do (3.14) ta có

$$y \in F(x, p_2) \cap B(\bar{y}, \bar{\delta}) \subset F(x, p_1) + Ld(p_1, p_2)D_Y.$$

Mặt khác, từ (3.3) ta có

$$d(x, H(p_1, y)) \leq \frac{1}{a}d(y, F(x, p_1)).$$

Vì vậy,

$$d(x, H(p_1, y)) \leq \frac{1}{a}d(y, F(x, p_1)) \leq \frac{L}{a}d(p_1, p_2).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét 3.3. Kết quả trên mở rộng kết quả tương ứng trong [13].

Kết luận

Dựa trên bài báo của M. Durea và R. Strugariu, luận văn trình bày một số kết quả về tính mở của ánh xạ đa trị và các định lý hàm ẩn thu được từ các kết quả đó.

Nội dung của luận văn bao gồm:

1. Các khái niệm cơ bản trong giải tích đa trị và một số kết quả kinh điển;
2. Các kết quả về tính mở của ánh xạ đa trị không chứa tham số và ánh xạ đa trị chứa tham số;
3. Các định lý hàm ẩn.

Luận văn có một kết quả mới, đó là khẳng định ở Mục 2.2 (Chương 2) nói rằng kết luận trong định lý ánh xạ mở của M. Durea và R. Strugariu [10, Theorem 3.1] không còn đúng, nếu loại bỏ giả thiết về tính đóng của ánh xạ đa trị được xét.

Khả năng sử dụng cách tiếp cận của [10] để phát triển thêm một bước các kết quả của N. D. Yen và J.-C. Yao [23] (sử dụng đối đạo hàm Mordukhovich tại một điểm trên đồ thị của ánh xạ đa trị được xét) vẫn còn là một vấn đề mở.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

- [1] Nguyễn Đông Yên (2007), *Giáo trình Giải tích đa trị*, NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.

Tiếng Anh

- [2] J.-P. Aubin (1984), Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems, *Math. Oper. Res.* 9, pp. 87-111.
- [3] J.-P. Aubin and I. Ekeland (1984), *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley, New York.
- [4] J.-P. Aubin and H. Frankowska (1990), *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Berlin.
- [5] J. M. Borwein and D. M. Zhuang (1988), Verifiable necessary and sufficient conditions for regularity of set-valued and single-valued maps, *J. Math. Anal. Appl.* 134, pp. 441-459.
- [6] J. M. Borwein and Q. J. Zhu (2005), *Techniques of Variational Analysis*, Springer, New York.
- [7] F. H. Clarke (1990), *Optimization and Nonsmooth Analysis*, SIAM, Philadelphia.

- [8] A. L. Dontchev and R. T. Rockafellar (1996), Characterizations of strong regularity for variational inequalities over polyhedral convex sets, *SIAM J. Optim.* 6, pp. 1087-1105.
- [9] M. Durea (2010), Openness properties for parametric set-valued mappings and implicit multifunctions, *Nonlinear Anal.* 72, 571-579.
- [10] M. Durea and R. Strugariu (2010), Qualitative results on openness of set-valued mappings and implicit function theorems, *Pacific J. Optim.* 6, pp. 533-549.
- [11] I. Ekeland (1974), On the variational principle, *J. Math. Anal. Appl.* 47 pp. 324-353.
- [12] Y. S. Ledyaev and Q. J. Zhu (1999), Implicit multifunction theorems, *Set-Valued Anal.* 7, pp. 209-238.
- [13] G. M. Lee, N. N. Tam, and N. D. Yen (2008), Normal coderivative for multifunctions and implicit function theorems, *J. Math. Anal. Appl.* 338, pp. 11-22.
- [14] B. S. Mordukhovich (1980), *Metric approximations and necessary optimality conditions for general classes of extremal problems*, Soviet Math. Dokl., **22**, pp. 526-530.
- [15] B. S. Mordukhovich (1993), *Complete characterization of openness, metric regularity and Lipschitzian properties of multifunctions*, Trans. Amer. Math. Soc., 340, pp. 1-35.
- [16] B.S. Mordukhovich (1994), *Generalized differential calculus for nonsmooth and set-valued mappings*, J. Math. Anal. Appl., 183, pp. 250-288.

- [17] B. S. Mordukhovich (2006), *Variational Analysis and Generalized Differentiation. Vol. I: Basic Theory, Vol. II: Applications*, Springer, Berlin.
- [18] H. V. Ngai and M. Thera (2004), Error bounds and implicit multifunction theorem in smooth Banach spaces and applications to optimization, *Set-Valued Anal.* 12, pp. 195-223.
- [19] J.-P. Penot (1998), Compactness properties, openness criteria and coderivatives, *Set-Valued Anal.* 6, pp. 363-380.
- [20] S. M. Robinson (1976), Stability theory for systems of inequalities, II. Differentiable nonlinear systems, *SIAM J. Numer. Anal.* 13, pp. 497-513.
- [21] R. T. Rockafellar (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [22] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets (1998), *Variational Analysis*, Springer, Berlin.
- [23] N. D. Yen and J.-C. Yao (2009), Point-based sufficient conditions for metric regularity of implicit multifunctions, *Nonlinear Anal.*, 70, pp. 2806-2815.

