C. TEORI PERMAINAN (KONTEN III)

Deskripsi Singkat

Teori permainan yang mula-mula dikembangkan oleh ilmuan Prancis bernama *Emile Borel* ini, secara umum digunakan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan tindakan sebuah unit bisnis untuk memenangkan persaingan dalam usaha yang digelutinya. Seperti diketahui, bahwa dalam praktek sehari-hari, setiap unit usaha atau organisasi pada umumnya harus berhadapan dengan para pesaing. Untuk memenangkan persaingan itulah, diperlukan analisis dan pemilihan strategi pemasaran tepat, khususnya strategi bersaing yang paling optimal bagi unit usaha atau organisasi yang bersangkutan.

Dalam teori permainan seorang lawan disebut sebagai pemain (*player*). Setiap pemain memiliki sejumlah pilihan, yang terhingga atau tak hingga, dimana pilihan tersebut adalah strategi pemain tersebut. Hasil (*payoffs*) dari sebuah permainan digambarkan sebagai fungsi dari strategi yang berbeda-beda dari setiap pemain. Sebuah permainan dengan dua pemain, dimana keuntungan satu pemain sama dengan kerugian pemain lainnya, dikenal dengan permainan dua-orang jumlah-nol (*two-person zero-sum*). Dalam permainan ini hasil dapat dinyatakan dalam bentuk hasil untuk salah satu pemain. Sebuah matriks yang serupa dengan matriks yang dipergunakan dalam bagian keputusan dalam ketidakpastian biasanya digunakan untuk menyatakan hasil kepada pemain yang strateginya dinyatakan dalam baris-baris matriks. Pembahasan utama pada bagian ini adalah permainan jumlah-nol dua-orang. (Hamdy, A. Taha,1996)

Kompetensi yang Dapat Dicapai Oleh Mahasiswa

1. Mampu membuat Permainan Dua orang jumlah nol dan Permainan Sederhana dan Strategi Campuran
2. Mampu menganalisis Permainan Dua orang jumlah nol dan Permainan Sederhana dan Strategi Campuran
3. Mampu menganalisis Grafik *Program linier dan Perluasan Permainan
4. Mampu membuat tugas Tim, mempresentasikannya dengan informatif dan jelas.

1. Permainan Dua-Orang Jumlah-Nol

Untuk mengilustrasikan definisi permainan dua-orang jumlah-nol, pertimbangkan situasi pelemparan uang logam dimana masing-masing dari dua orang pemain (pemain A, dan pemain B) memilih muka (M) atau belakang (B). Jika hasilnya benar (yaitu, M untuk M atau B untuk B), maka pemain A memenangkan $1,00 dari pemain B. Jika tidak, maka pemain B yang menang dan pemain A mengalami kehilangan $1,00 yang berpindah tangan ke pemain B. Dalam permainan ini, setiap pemain memiliki dua strategi (M atau B) yang menghasilkan matriks permainan 2x2, yang diekspresikan dalam bentuk hasil untuk A (*payoff to A*);

		Player B	
		M	B
Player A	M	1	-1
	B	-1	1

Penyelesaian "optimal" untuk permainan seperti ini kemungkinan mengharuskan setiap pemain untuk memainkan strategi murni (*pure strategy,* sebagai contoh M dan B) atau gabungan dari beberapa strategi murni. Kasus ini disebut sebagai penyeleksian strategi campuran (*mixed strategy*). (Hamdy, A. Taha,1996).

Penyelesaian masalah dalam teori permainan, biasanya menggunakan dua karakteristik strategi, yaitu strategi murni dan strategi campuran. Penyelesaian masalah dengan strategi murni dilakukan dengan menggunakan konsep **maximin** dan **minimax.** Dalam strategi ini seorang pemain akan menggunakan satu strategi untuk mendapatkan hasil optimal.

Bila suatu permainan tidak mempunyai titik keseimbangan, maka teori permainan menyarankan setiap pemain untuk menetapkan distribusi peluang dari strategi yang akan diterapkannya. Untuk menyatakannya secara matematis dapat dituliskan:

X_i = peluang pemain I menggunakan strategi i (i=1,2,..m),

Y_j = peluang pemain II menggunakan strategi j (j=1,2,..n),

Di mana m dan n berturut-turut adalah banyaknya strategi yang mungkin. Jadi pemain I dapat menyebutkan strateginya untuk memainkan permainan dengan memberikan nilai $x_1, x_2, \ldots x_m$. Karena nilai-nilai ini peluang, maka nilainya tak negative dan jumlahnya 1. Dengan cara yang sama, strategi pemain II dapat digambarkan oleh nilai-nilai $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Strategi $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ dan $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ biasa disebut strategi campuran (mixed strategies).

Pada bagian Perumusan Permainan Dua Orang Jumlah Nol memperlihatkan bahwa adanya titik keseimbangan segera menghasilkan strategi murni yang optimal untuk permainan tersebut. Tetapi, beberapa permainan tidak memiliki titik keseimbangan (*saddle point*). Contohnya, Pertimbangkan contoh permainan jumlah-nol berikut ini :

		B 1	2	3	4	Minimum dari baris	
A	1	5	-10	9	0	- 10	
	2	6	7	8	1	1	
	3	8	7	15	2	2	Maksimim
	4	3	4	-1	4	-1	
Maksimum dari kolom		8	7	15	4		
					Minimaks		

Nilai minimaks (= 4) lebih besar daripada nilai maksimim (= 2). Jadi permainan ini tidak memiliki titik keseimbangan dan strategi maksimin-minimaks murni tidak optimal. Hal ini terjadi karena setiap pemain dapat meningkatkan hasilnya dengan memilih strategi yang berbeda. Dalam kasus ini, permainan tersebut dikatakan bersifat **tidak stabil**.

Kegagalan strategi minimaks-maksimin (murni) untuk memberikan pemecahan optimal pada permainan, pada umumnya telah mengarah pada gagasan penggunaan strategi campuran. Setiap pemain bukannya hanya memilih satu strategi murni, melainkan dapat memainkan semua strateginya sesuai dengan sekelompok probabilitas yang sudah ditentukan sebelumnya. Anggaplah $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah probabilitas baris dan kolom yang darinya A dan B, secara berurutan, memilih strategi murni mereka. Jadi,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$x_i, y_j \geq 0, \textit{ untuk semua } i \textit{ dan } j$$

Jadi, jika a_{ij} mewakili entri ke-(i,j) dari matriks permainan ini, x_i dan y_j akan tampak seperti dalam matriks berikut ini :

		B			
		y_1	y_2	…	y_n
A	x1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	x2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	⋮	⋮	⋮		⋮
	xm	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Pemecahan masalah strategi campuran juga didasari oleh kriteria minimaks yang diberikan dalam bagian 10.4.1. Satu-satunya perbedaan adalah bahwa A memilih x_i yang memaksimumkan hasil terkecil yang diperkirakan dalam sebuah kolom, sementara B memilih y_j yang meminimumkan hasil terbesar yang diperkirakan dalam sebuah baris. Secara matematis, kriteria

minimaks untuk kasus strategi campuran adalah seperti berikut ini. Pemain A memilih x_i ($x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$) yang akan menghasilkan

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

Dan pemain B memilih y_j ($y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$) yang akan menghasilkan

$$\min_{y_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)\right\}$$

Nilai-nilai ini secara berturut-turut disebut sebagai nilai maksimin dan minimaks yang diperkirakan. Seperti dalam kasus strategi murni, hubungan hasil minimaks yang diperkirakan $\geq$ hasil maksimin yang diperkirakan berlaku. Ketika x_i dan y_j bersesuaian dengan pemecahan optimal, persamaan berlaku dan nilai-nilai yang dihasilkan menjadi sama dengan nilai (optimal) yang diperkirakan dari permainan itu. Hasil ini disimpulkan dari teorema minimaks dan dinyatakan di sini tanpa bukti (lihat problem 10-27). Jika x_i^* dan y_j^* adalah pemecahan optimal untuk kedua pemain, setiap elemen hasil aij akan berkaitan dengan probabilitas $\left(x_i^* y_j^*\right)$, **Jadi nilai optimal yang diperkirakan dari permainan ini adalah** :

$$v^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* y_j^*$$

a. Strategi Murni

Penyelesaian masalah dengan strategi murni dilakukan dengan menggunakan konsep ***maximin*** untuk pemain/perusahaan baris dan konsep ***minimax*** untuk pemain/perusahaan kolom. Dalam strategi ini seorang pemain atau perusahaan akan menggunakan satu strategi/strategi tunggal untuk mendapatkan hasil optimal (sadle point yang sama).

b. Strategi Campuran

Penyelesaian masalah dengan strategi campuran dilakukan apabila strategi murni yang digunakan belum mampu menyelesaikan masalah permainan atau belum mampu memberikan pilihan strategi yang optimal bagi masing-masing pemain/perusahaan. Dalam strategi ini seorang pemain atau perusahaan akan menggunakan campuran/lebih dari satu strategi untuk mendapatkan hasil optimal. Agar sebuah permainan atau persaingan menjadi optimal, setiap strategi yang dipergunakan berusaha untuk mendapatkan nilai permainan (sadle point) yang sama.

Ketentuan-Ketentuan Dasar Dalam Teori Permainan

		Perusahaan B		
		Strategi Harga Murah (S1)	Strategi Harga Sedang (S2)	Strategi Harga Mahal (S3)
Perusahaan A	Strategi Harga Murah (S1)	1	9	2
	Strategi Harga Mahal (S2)	8	5	4

Dari contoh Tabel matrik ***pay off*** (matrik permainan) di atas, dapat dijelaskan beberapa ketentuan dasar yang terpenting dalam teori permainan, yakni :

1) Nilai-nilai yang ada dalam tabel tersebut (yakni angka 1, 9, 2 di baris pertama dan 8, 5, 4 di baris kedua), merupakan hasil yang diperoleh dari penggunaan berbagai strategi yang dipilih oleh kedua perusahaan. Satuan nilai tersebut merupakan efektifitas yang dapat berupa uang, persentase pangsa pasar, jumlah pelanggan dan sejenisnya. Nilai positif menunjukkan keuntungan bagi pemain baris dan kerugian bagi pemain kolom, begitu pula sebaliknya nilai negatif menunjukkan kerugian bagi pemain baris dan keuntungan bagi pemain kolom. Sebagai contoh nilai 9 pada sel **C12** menunjukkan apabila pemain/perusahaan A menggunakan strategi harga murah (S1) dan perusahaan B meresponnya dengan strategi harga sedang (S2), maka perusahaan A akan mendapatkan keuntungan sebesar 9 yang berarti perusahaan B akan mengalami kerugian sebesar 9.
2) Suatu strategi dari sebuah pemain/perusahaan dianggap tidak dapat dirusak oleh perusahaan lainnya.
3) Setiap pemain/perusahaan akan memilih strategi-strategi tersebut secara terus menerus selama perusahaan masih memiliki keinginan melanjutkan usahanya
4) Suatu permainan/persaingan dikatakan adil atau ***'fair'*** apabila hasil akhir permainan atau persaingan menghasilkan nilai nol (0), atau tidak ada pemain atau perusahaan yang menang/kalah atau mendapat keuntungan/kerugian.
5) Suatu strategi dikatakan dominan terhadap strategi lainnya apabila memiliki nilai *pay off* yang lebih baik dari strategi lainnya. Maksudnya, bagi pemain/perusahaan baris, nilai positif (keuntungan) yang diperoleh dari suatu strategi yang digunakan, menghasilkan nilai positif yang lebih besar dari hasil penggunaan strategi lainnya. Bagi pemain kolom, nilai negatif (kerugaian) yang diperoleh dari suatu strategi yang digunakan, menghasilkan nilai negatif yang lebih kecil dari hasil penggunaan strategi lainnya.
6) Tujuan dari teori permainan ini adalah mengidentifikasi strategi yang paling optimal untuk setiap perusahaan. Penyelesaian "optimal" untuk permainan seperti ini kemungkinan mengharuskan setiap pemain untuk memainkan strategi murni (*pure strategy*, sebagai contoh M dan B) atau gabungan dari beberapa strategi murni. Kasus ini disebut sebagai penyeleksian strategi campuran (*mixed strategy*).(Aris B. Setyawan).

Penyelesaian masalah dalam teori permainan, biasanya menggunakan dua karakteristik strategi, yaitu strategi murni dan strategi campuran. Penyelesaian masalah dengan strategi murni dilakukan dengan menggunakan konsep maximin dan minimax. Dalam strategi ini seorang pemain akan menggunakan satu strategi untuk mendapatkan hasil optimal.

Bila suatu permainan tidak mempunyai titik keseimbangan, maka teori permainan menyarankan setiap pemain untuk menetapkan distribusi peluang dari strategi yang akan diterapkannya. Untuk menyatakannya secara matematis dapat dituliskan:

X_i = peluang pemain I menggunakan strategi i (i=1,2,..m),

Y_j = peluang pemain II menggunakan strategi j (j=1,2,..n),

Di mana m dan n berturut-turut adalah banyaknya strategi yang mungkin. Jadi pemain I dapat menyebutkan strateginya untuk memainkan permainan dengan memberikan nilai $x_1,x_2,\ldots x_m$. Karena nilai-nilai ini peluang, maka nilainya tak negative dan jumlahnya 1. Dengan cara yang sama, strategi pemain II dapat digambarkan oleh nilai-nilai $y_1,y_2,\ldots,y_n$. Strategi $(x_1,x_2,\ldots x_m)$ dan $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ biasa disebut strategi campuran (mixed strategies).

Pada bagian Perumusan Permainan Dua Orang Jumlah Nol memperlihatkan bahwa adanya titik keseimbangan segera menghasilkan strategi murni yang optimal untuk permainan tersebut. Tetapi, beberapa permainan tidak memiliki titik keseimbangan (*saddle point*). Contohnya, Pertimbangkan contoh permainan jumlah-nol berikut ini :

Nilai minimaks (= 4) lebih besar daripada nilai maksimim (= 2). Jadi permainan ini tidak memiliki titik keseimbangan dan strategi maksimin-minimaks murni tidak optimal. Hal ini terjadi karena setiap pemain dapat meningkatkan hasilnya dengan memilih strategi yang berbeda. Dalam kasus ini, permainan tersebut dikatakan bersifat **tidak stabil**.

Kegagalan strategi minimaks-maksimin (murni) untuk memberikan pemecahan optimal pada permainan, pada umumnya telah mengarah pada gagasan penggunaan strategi campuran. Setiap pemain bukannya hanya memilih satu strategi murni, melainkan dapat memainkan semua strateginya sesuai dengan sekelompok probabilitas yang sudah ditentukan sebelumnya. Anggaplah $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah probabilitas baris dan kolom yang darinya A dan B, secara berurutan, memilih strategi murni mereka. Jadi,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$x_i, y_j \geq 0, \; untuk \;\; semua \;\; i \;\; dan \;\; j$$

Jadi, jika a_{ij} mewakili entri ke-(i,j) dari matriks permainan ini, x_i dan y_j akan tampak seperti dalam matriks berikut ini :

$$\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & B & \\ & & & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \hline & & x1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ A & & x2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & xm & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}$$

Pemecahan masalah strategi campuran juga didasari oleh kriteria minimaks yang diberikan. Satu-satunya perbedaan adalah bahwa A memilih x_i yang memaksimumkan hasil terkecil yang

diperkirakan dalam sebuah kolom, sementara B memilih y_j yang meminimumkan hasil terbesar yang diperkirakan dalam sebuah baris. Secara matematis, kriteria minimaks untuk kasus strategi campuran adalah seperti berikut ini. Pemain A memilih x_i ($x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$) yang akan menghasilkan

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

Dan pemain B memilih y_j ($y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$) yang akan menghasilkan

$$\min_{y_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)\right\}$$

Nilai-nilai ini secara berturut-turut disebut sebagai nilai maksimin dan minimaks yang diperkirakan.

Seperti dalam kasus strategi murni, hubungan hasil minimaks yang diperkirakan $\geq$ hasil maksimin yang diperkirakan berlaku. Ketika x_i dan y_j bersesuaian dengan pemecahan optimal, persamaan berlaku dan nilai-nilai yang dihasilkan menjadi sama dengan nilai (optimal) yang diperkirakan dari permainan itu. Hasil ini disimpulkan dari teorema minimaks dan dinyatakan di sini tanpa bukti (lihat problem 10-27). Jika x_i^* dan y_j^* adalah pemecahan optimal untuk kedua pemain, setiap elemen hasil aij akan berkaitan dengan probabilitas $(x_i^* y_j^*)$

Jadi nilai optimal yang diperkirakan dari permainan ini adalah :

$$v^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* y_j^*$$

c. Game Metode Grafik

Metode grafik merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mencari nilai optimum dari setiap pemain yang terlibat di dalamnya. Metoda grafik dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah permainan yang mempunyai matriks pay-off berukuran 2 x n atau m x 2. Penyelesaian dengan menggunakan metode grafik ini diawali dengan melihat nilai pay-off yang diharapkan untuk setiap strategi murni yang digunakan oleh lawan. Yang mana pada masalah ini nilai pay-off yang diharapkan ditentukan oleh peluang penggunaan setiap strategi. Untuk lebih jelasnya, akan dijelaskan permainan 2 x n (baris) dan m x 2(kolom)

❖ **Permainan 2 x n**

Bila matriks suatu permainan berukuran 2 x n, maka permainan tersebut dapat diselesaikan dengan metode grafik didasarkan pada cara penyelesaian berikut :

- Bila $X_1 = X_1^*$ adalah peluang penggunaan strategi I dan $X_2 = X_2^*$ adalah peluang penggunaan strategi 2 oleh pemain baris, maka $X_1 + X_2 = 1$
- Nilai pay-off yang diharapkan bagi pemain baris dapat diketahui untuk setiap strategi murni yang digunakan oleh pemain kolom dengan didasarkan pada peluang setiap strateginya tersebut (X_1 danX_2).
- Dilakukan pembuatan grafik hubungan nilai pay-off yang diharapkan bagi pemain baris pada setiap peluang untuk setiap strategi murni pemain kolom.
- Berdasarkan kriteria maksimin dapat ditentukan peluang penggunaan strategi secara optimum untuk setiap pemain baris dan nilai permainannya.

Adapun bentuk matriks pembayaran untuk permainan 2 x n adalah

		P_2				
P_1	j i	y_1	y_2	y_3	. . .	y_n
	X_1 X_2=1-X_1	a_{11} a_{21}	a_{12} a_{22}	a_{13} a_{23}	. . . . . .	a_{1n} a_{2n}

Dan tabel pembayaran harapan pemain baris adalah

Strategi Murni Pemain 2	Pembayaran Harapan Pemain I
1	$a_{11}.x_1+a_{21}.(1-X_1)=(a_{11}-a_{21})X_1+a_{21}$
2	$a_{12}.x_1+a_{22}.(1-X_1)=(a_{12}-a_{22})\ X_1+a_{22}$
:	:
N	$a_{1n}.x_1+a_{2n}.(1-X_1)=(a_{1n}-a_{2n})\ X_1+a_{2n}$

❖ **Permainan m x 2**

Bila matriks suatu permainan berukuran m x 2, maka permainan tersebut dapat diselesaikan dengan metode grafik didasarkan pada cara penyelesaian berikut :

- Bila Y_1 = $Y1^*$adalah peluang penggunaan strategi 1 dan Y_2 = Y_2^* adalah penggunaan strategi 2 oleh pemain kolom, maka $Y_1 + Y_2 = 1$
- Nilai pay-off yang diharapkan bagi pemain kolom dapat diketahui untuk setiap strategi murni yang digunakan oleh pemain baris dengan didasarkan pada peluang penggunaan setiap strateginya tersebut(Y_1 dan Y_2).
- Dilakukan pembuatan grafik hubungan nilai pay-off yang diharapkan bagi pemain kolom pada setiap peluang untuk setiap strategi murni pemain baris.
- Berdasarkan kriteria minimaks dapat ditentukan peluang penggunaan setiap strategi yang optimum untuk pemain kolom dan nilai permainannya.

  Adapun bentuk matriks pembayaran m x 2 adalah

		Pemain P_2		
			y_1	$y_2 = 1 - y1$
		j i	1	2
Pemain P_1	x_1	1	a11	a12
	x_2	2	a21	a22
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	xm	m	am1	am2

Pembayaran harapan yang berkaitan dengan strategi murni pemain P_2 adalah sebagai berikut :

Tabel Pembayaran Harapan Pemain II

Strategi murni pemain 1	Pembayaran harapan pemain 2 (P2)
1	$(a11 - a21)y1 + a12$
2	$(a12 - a22)y1 + a22$
.	.
.	.
.	.
m	$(am1 - am2)y1 + am2$

Tabel di atas menunjukkan bahwa pembayaran harapan (rata-rata pembayaran) bagi pemain P2 bervariasi secara linear dengan $y1$. Berdasarkan kriteria minimax untuk pemain P2 harus memilih nilai $y1$ yang akan **meminimumkan** pembayaran harapan (rata-rata pembayaran) maksimumnya (prinsip **minimax**). Hal ini dapat dilakukan dengan cara menggambarkan garis-garis lurus di atas sebagai fungsi dari $y1$. Sumbu vertikal menunjukkan pembayaran harapan (rata-rata pembayaran) dan sumbu horizontal menunjukkan variasi dari $y1$ ($0 \leq y1 \leq 1$). Dalam grafik ini dicari titik minimaxnya.

Penyelesaian dengan metode grafik dapat terjadi jika dan hanya jika salah satu pemain yang terlibat dalam permainan tersebut mempunyai 2 strategi. Adapun matriks pay-off untuk dua pemain sebagai berikut :

Pemain II

		Y_1	Y_2	…	Yn
Pemain I	$X_1=X_1^*$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	$X_2^* = 1 - X_1^*$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}

Keterangan :

$X_1 = X_1^*$ = probabilitas pemain 1 memainkan strategi kesatu

$X_2 = X_2^*$ = probabilitas pemain 1 memainkan strategi kedua

Yn = probabilitas pemain 2 memainkan strategi ke-*n*

Diasumsikan bahwa grafik ini tidak memiliki titik equilibrium. Karena pemain I memiliki dua strategi dan pemain I merupakan pemain baris, maka peluang terlaksananya setiap strategi adalah $X_1 + X_2 = 1$ sehingga dapat dituliskan sebagai berikut $X_2 = 1 - X_1$, $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$. Maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah

- Menghitung nilai X_1 dan X_2 pada pemain I dengan menganggap pemain II menggunakan strategi murni. Maka tabel pembayaran harapan bagi pemain I adalah sebagai berikut :

Tabel pembayaran harapan untuk pemain I

Strategi Murni Pemain 2	Pembayaran Harapan Pemain I
1	$a_{11}.x_1+a_{21}.(1-x_1)=(a_{11}-a_{21})\ X_1+a_{21}$
2	$a_{12}.x_1+a_{22}.(1-x_1)=(a_{12}-a_{22})\ X_1+a_{22}$
:	:
N	$a_{1n}.x_1+a_{2n}.(1-x_1)=(a_{1n}-a_{2n})\ X_1+a_{2n}$

Sumber:http://cristianolineker.blogspot.com/2009/02/teori-permainan-danpenyelesainnya.html

Tabel di atas menunjukkan bahwa pembayaran harapan (rata-rata pembayaran) bagi pemain P1 bervariasi secara linear dengan X_1. Berdasarkan kriteria minimax untuk pemain P1 harus memilih nilai X_1 yang akan memaksimalkan pembayaran harapan (rata-rata pembayaran) minimumnya (prinsip maximin). Hal ini dapat dilakukan dengan cara menggambarkan garis-garis lurus di atas sebagai fungsi dari X_1 dalam suatu grafik yang mana sumbu vertikal

menunjukkan pembayaran harapan (rata-rata pembayaran) dan sumbu horizontal menunjukkan nilai dari x_1 ($0 \leq X_1 \leq 1$).

- Selanjutnya akan dicari nilai optimum pada pemain I (X_1 dan X_2) serta nilai permainannya (v*). **Nilai optimum maupun nilai permainan itu sendiri diperoleh dengan mencari titik perpotongan dari dua garis yang berlainan tanda dan paling mendekati sumbu horizontal dan titik inilah yang disebut dengan titik maksimin**. Dalam hal ini, harus memilih nilai X_1 yang akan memaksimalkan pembayaran harapan minimum pada pemain I. Setelah nilai optimum X_1 diperoleh, maka nilai permainan dapat juga diketahui dengan cara mensubstitusi nilai X_1 ke dalam salah satu garis yang berpotongan dan melalui titik maksimin.
- Karena nilai optimum dari pemain I sudah diketahui maka untuk mencari nilai optimum pemain II, digunakan titik perpotongan sebelumnya. Titik ini menunjukkan banyaknya strategi pemain II yang dapat digunakan. Maksudnya adalah dengan menggunakan rumus

  $$v^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_i^*\, Y_j^*$$

  sehingga nilai dari Y_1, Y_2,…, Yn dapat ditentukan. Dengan bantuan rumus ini, maka akan terbentuk matriks pembayaran pemain II yang baru, yang mana pemain I akan melakukan strategi murni dan dalam pencarian nilai optimum pemain II, harus memilih nilai Y_1 (yang berpotongan pada dua buah garis) yang dapat meminimumkan pembayaran harapan yang maksimum.
- Setelah mendapatkan tabel pembayarn harapan yang baru untuk pemain II atau pemain kolom maka dapat dibuatkan grafik untuk mencari nilai optimumnya. Yang pada grafik, sumbu horizontalnya menunjukkan nilai peluang Y dan sumbu vertikalnya menunjukkan nilai pembayaran (*pay-off*). Perpotongan garis yang berlainan tanda dan paling menjauhi sumbu horizontal dinamakan titik minimaks. Dan titik inilah yang diperlukan dalam mencari nilai optimum untuk pemain kolom.

2. Game Dengan Simpleks

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai persoalan-persoalan seperti: seseorang ingin menyewa penginapan untuk sejumlah orang dengan harga yang semurah mungkin, seseorang ingin memproduksi sejumlah barang sebanyak mungkin dengan bakunya yang terbatas, atau ingin menjual sejumlah barang yang jenisnya tertentu untuk mendapat keuntungan yang semaksimal mungkin, dan sebagainya.

Berkaitan dengan hal ini, seseorang harus membuat keputusan-keputusan tentang bagaimana mengalokasikan sumber-sumber yang dimilikinya (seperti bahan baku, modal, tenaga kerja, dll) secara terbatas. Maka konsekuensinya adalah manajemen harus secara kontinyu mengalokasikan sumber-sumber yang langka itu untuk mencapai tujuan. Persoalan Program Linier adalah suatu persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai peubah sedemikian rupa sehingga nilai fungsi tujuan yang linier menjadi optimum (maksimum atau minimum) dengan memperhatikan batasan-batasan yang ada.

Program Linier merupakan cara untuk menyelesaikan suatu problem seperti di atas berdasarkan kaidah matematika dimana semua hubungan diantara peubah-peubahnya(variabel) adalah linier baik yang ada pada ketentuan-ketentuan batasannya (Constraints)maupun yang ada pada fungsi optimalisasinya. *(Siringoringo, 2005)*

a. Metode Simpleks

Salah satu teknik penentuan solusi optimal yang digunakan dalam pemrograman linier adalah metode simpleks. Penentuan solusi optimal menggunakan metode simpleks didasarkan pada

teknik eleminasi Gauss Jordan. Penentuan solusi optimal dilakukan dengan memeriksa titik ekstrim satu per satu dengan cara perhitungan iteratif. Sehingga penentuan solusi optimal dengan simpleks dilakukan tahap demi tahap yang disebut dengan iterasi. Iterasi ke-i hanya tergantung dari iterasi sebelumnya.

Ada beberapa istilah yang sangat sering digunakan dalam metode simpleks, diantaranya :

1) **Iterasi** adalah tahapan perhitungan dimana nilai dalam perhitungan itu tergantung dari nilai tabel sebelumnya.
2) **Variabel non basis** adalah variabel yang nilainya diatur menjadi nol pada sembarang iterasi. Dalam terminologi umum, jumlah variabel non basis selalu sama dengan derajat bebas dalam sistem persamaan.
3) **Variabel basis** merupakan variabel yang nilainya bukan nol pada sembarang iterasi. Pada solusi awal, variabel basis merupakan variabel slack (jika fungsi kendala merupakan pertidaksamaan ≤) atau variabel buatan (jika fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan ≥ atau =). Secara umum, jumlah variabel basis selalu sama dengan jumlah fungsi pembatas (tanpa fungsi non negatif).
4) **Solusi atau nilai kanan** merupakan nilai sumber daya pembatas yang masih tersedia. Pada solusi awal, nilai kanan atau solusi sama dengan jumlah sumber daya pembatas awal yang ada, karena aktivitas belum dilaksanakan.
5) **Variabel slack** adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan ≤ menjadi persamaan (=). Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel slack akan berfungsi sebagai variabel basis.

6) **Variabel surplus** adalah variabel yang dikurangkan dari model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan ≥ menjadi persamaan (=). Penambahan ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel surplus tidak dapat berfungsi sebagai variabel basis.

7) **Variabel buatan** adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala dengan bentuk ≥ atau = untuk difungsikan sebagai variabel basis awal. Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Variabel ini harus bernilai 0 pada solusi optimal, karena kenyataannya variabel ini tidak ada. Variabel hanya ada di atas kertas.

8) **Kolom pivot (kolom kerja)** adalah kolom yang memuat variabel masuk. Koefisien pada kolom ini akan menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot (baris kerja).

9) **Baris pivot (baris kerja)** adalah salah satu baris dari antara variabel basis yang memuat variabel keluar.

10) **Elemen pivot (elemen kerja)** adalah elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot. Elemen pivot akan menjadi dasar perhitungan untuk tabel simpleks berikutnya.

11) **Variabel masuk** adalah variabel yang terpilih untuk menjadi variabel basis pada iterasi berikutnya. Variabel masuk dipilih satu dari antara variabel non basis pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai positif.

12) **Variabel keluar** adalah variabel yang keluar dari variabel basis pada iterasi berikutnya dan digantikan oleh variabel masuk. Variabel keluar dipilih satu dari antara variabel basis pada setiap iiterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai nol.

(Siringoringo, 2005)

b. BENTUK BAKU

Sebelum melakukan perhitungan iteratif untuk menentukan solusi optimal, pertama sekali bentuk umum pemrograman linier dirubah ke dalam bentuk baku terlebih dahulu. Bentuk baku dalam metode simpleks tidak hanya mengubah persamaan kendala ke dalam bentuk sama dengan, tetapi setiap fungsi kendala harus diwakili oleh satu variabel basis awal. Variabel basis awal menunjukkan status sumber daya pada kondisi sebelum ada aktivitas yang dilakukan. Dengan kata lain, variabel keputusan semuanya masih bernilai nol. Dengan demikian, meskipun fungsi kendala pada bentuk umum pemrograman linier sudah dalam bentuk persamaan, fungsi kendala tersebut masih harus tetap berubah.

Ada beberapa hal yang harus diperhatikan dalam membuat bentuk baku, yaitu :

1) Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\leq$ dalam bentuk umum, dirubah menjadi persamaan (=) dengan menambahkan satu variabel slack.
2) Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\geq$ dalam bentuk umum, dirubah menjadi persamaan (=) dengan mengurangkan satu variabel surplus.
3) Fungsi kendala dengan persamaan dalam benttuk umum,ditambahkan satu artificial variabel (variabel buatan).

Perhatikan kasus A berikut :

Fungsi tujuan : minimumkan $z = 2\ x_1 + 5.5\ x_2$

Kendala :

$x_1 + x_2 = 90$

$0.001\ x_1 + 0.002\ x_2 \leq 0.9$

$0.09\ x_1 + 0.6\ x_2 \geq 27$

$0.02\ x_1 + 0.06\ x_2 \leq 4.5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Bentuk di atas adalah bentuk umum pemrograman liniernya. Kedalam bentuk baku, model matematik tersebut akan berubah menjadi :

Fungsi tujuan : minimumkan $z = 2\ x_1 + 5.5\ x_2$

Kendala :

$x_1 + x_2 + s_1 = 90$

$0.001\ x_1 + 0.002\ x_2 + s_2 = 0.9$

$0.09\ x_1 + 0.6\ x_2 - s_3 + s_4 = 27$

$0.02\ x_1 + 0.06\ x_2 + s_5 = 4.5$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \geq 0$

Fungsi kendala pertama mendapatkan variable buatan **(s_1)**, karena bentuk umumnya sudah menggunakan bentuk persamaan. Fungsi kendala kedua dan keempat mendapatkan variabel slack (**s_2** dan **s_5**) karena bentuk umumnya menggunakan pertidaksamaan $\leq$, sedangkan fungsi kendala ketiga mendapatkan variabel surplus (s_3) dan variabel buatan (s_4) karena bentuk umumnya menggunakan pertidaksamaan $\geq$.

Perhatikan pula kasus B berikut ini :

Maksimumkan $z = 2x_1 + 3x_2$

Kendala :

$10\ x_1 + 5\ x_2 \leq 600$

$6\ x_1 + 20\ x_2 \leq 600$

$8\ x_1 + 15\ x_2 \leq 600$

$x_1, x_2 \geq 0$

Bentuk di atas juga merupakan bentuk umum. Perubahan ke dalam bentuk baku hanya membutuhkan variabel slack, karena semua fungsi kendala menggunakan bentuk pertidaksamaan $\leq$ dalam bentuk umumnya. Maka bentuk bakunya adalah sebagai berikut :

Maksimumkan $z = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Kendala :

$10\ x_1 + 5\ x_2 + s_1 = 600$

$6\ x_1 + 20\ x_2 + s_2 = 600$

$8\ x_1 + 15\ x_2 + s_3 = 600$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

s_1, s_2, s_3 merupakan variable slack.

3. PEMBENTUKAN TABEL SIMPLEKS

Dalam perhitungan iterative, kita akan bekerja menggunakan tabel. Bentuk baku yang sudah diperoleh, harus dibuat ke dalam bentuk tabel.

Semua variabel yang bukan variabel basis mempunyai solusi (nilai kanan) sama dengan nol dan koefisien variabel basis pada baris tujuan harus sama dengan 0. Oleh karena itu kita harus membedakan pembentukan tabel awal berdasarkan variabel basis awal. Dalam sub bab ini kita hanya akan memperhatikan fungsikendala yang menggunakan variabel slack dalam bentuk bakunya, sedangkan yang menggunakan variabel buatan akan dibahas pada sub bab lainnya.

Gunakan kasus B di atas, maka tabel awal simpleksnya adalah :

VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	solusi
Z	-2	-3	0	0	0	0
S_1	10	5	1	0	0	600
S_2	6	20	0	1	0	600
S_3	8	15	0	0	1	600

❖ LANGKAH-LANGKAH PENYELESAIAN

Langkah-langkah penyelesaian adalah sebagai berikut :

1) Periksa apakah tabel layak atau tidak. Kelayakan tabel simpleks dilihat dari solusi (nilai kanan). Jika solusi ada yang bernilai negatif, maka tabel tidak layak. Tabel yang tidak layak tidak dapat diteruskan untuk dioptimalkan.
2) Tentukan kolom pivot. Penentuan kolom pivot dilihat dari koefisien fungsi tujuan (nilai di sebelah kanan baris z) dan tergantung dari bentuk tujuan. Jika tujuan maksimisasi, maka kolom pivot adalah kolom dengan koefisien paling negatif. Jika tujuan minimisasi , maka kolom pivot adalah kolom dengan koefisien positif terbesar. Jika kolom pivot ditandai dan ditarik ke atas, maka kita akan mendapatkan variabel keluar. Jika nilai paling negatif (untuk tujuan maksimisasi) atau positif terbesar (untuk tujuan minimisasi) lebih dari satu, pilih salah satu secara sembarang.
3) Tentukan baris pivot. Baris pivot ditentukan setelah membagi nilai solusi dengan nilai kolom pivot yang bersesuaian (nilai yang terletak dalam satu baris). Dalam hal ini, nilai negatif dan 0 pada kolom pivot tidak diperhatikan, artinya tidak ikut menjadi pembagi. Baris pivot adalah baris dengan rasio pembagian terkecil. Jika baris pivot ditandai dan ditarik ke kiri, maka kita akan mendapatkan variabl keluar. Jika rasio pembagian terkecil lebih dari satu, pilih salah sau secara sembarang.
4) Tentukan elemen pivot. Elemen pivot merupakan nilai yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot.
5) Bentuk tabel simpleks baru. Tabel simpleks baru dibentuk dengan pertama sekali menghitung nilai baris pivot baru. Baris pivot baru adalah baris pivot lama dibagi dengan elemen pivot. Baris baru lainnya merupakan pengurangan nilai kolom pivot baris yang

bersangkutan dikali baris pivot baru dalam satu kolom terhadap baris lamanya yang terletak pada kolom tersebut.

6) Periksa apakah tabel sudah optimal. Keoptimalan tabel dilihat dari koefisien fungsi tujuan (nilai pada baris z) dan tergantung dari bentuk tujuan. Untuk tujuan maksimisasi, tabel sudah optimal jika semua nilai pada baris z sudah positif atau 0. Pada tujuan minimisasi, tabel sudah optimal jika semua nilai pada baris z sudah negatif atau 0. Jika belum, kembali ke langkah no. 2 , jika sudah optimal baca solusi optimalnya.

4. Contoh Soal Teori Permainan

a) Contoh kasus 1 (Strtaegi Murni)

Dua buah perusahaan yang memiliki produk yang relatif sama, selama ini saling bersaing dan berusaha untuk mendapatkan keuntungan dari lawan pasar yang ada. Untuk keperluan tersbut, perusahaan A mengandalkan 2 strategi dan perusahaan B menggunakan 3 macam strategi, dan hasilnya terlihat pada tabel berikut ini :

		Perusahaan B		
		Strategi Harga Murah (S1)	Strategi Harga Sedang (S2)	Strategi Harga Mahal (S3)
Perusahaan A	Strategi Harga Murah (S1)	1	9	2
	Strategi Harga Mahal (S2)	8	5	4

Dari kasus di atas, bagaimana strategi yang harus digunakan oleh masing-masing
pemain atau perusahaan, agar masing-masing mendapatkan hasil yang optimal kalau untung, keuntungan tersebut besar, dan kalau harus rugi maka kerugian tersebut kecil.

Penyelesaian: Seperti telah dijelaskan di atas, bagi pemain baris akan menggunakan aturan ***maximin*** dan pemain kolom akan menggunakan aturan ***minimax***.

- **Langkah 1**

Untuk pemain baris (perusahaan A), pilih nilai yang paling kecil untuk setiap baris
(Baris satu nilai terkecilnya 1 dan baris dua nilai terkecilnya 4). Selanjutnya dari dua nilai terkecil tersebut, pilih nilai yang paling baik atau besar, yakni nilai **4**.

- **Langkah 2**

Untuk pemain kolom, (perusahaan B), pilih nilai yang paling besar untuk setiap kolom (kolom satu nilai terbesarnya 8, kolom dua nilai terbesarnya 9, dan kolom tiga nilai terbesarnya 4). Selanjutnya dari tiga nilai terbesar tersebut, pilih nilai yang paling baik atau kecil bagi B, yakni nilai **4** (rugi yang paling kecil).

-

		Perusahaan B			Maximin
		Strategi Harga Murah (S1)	Strategi Harga Sedang (S2)	Strategi Harga Mahal (S3)	
Perusahaan A	Strategi Harga Murah (S1)	1	9	2	1
	Strategi Harga Mahal (S2)	8	5	4	4

❖ **Langkah 3**

Karena pilihan pemain baris-A dan pemain kolom-B sudah sama, yakni masing-masing memilih nilai **4**, maka permainan ini sudah dapat dikatakan optimal → sudah ditemukan nilai permainan (sadle point) yang sama. Hasil optimal di atas, dimana masing-masing pemain memilih nilai 4 mengandung arti bahwa pemain A meskipun menginginkan keuntungan yang lebih besar, namun A hanya akan mendapat keuntungan maksimal sebesar 4, bila ia menggunakan strategi harga mahal (S2). Sedangkan pemain B, meskipun menginginkan kerugian yang

dideritanya adalah sekecil mungkin, namun kerugian yang paling baik bagi B adalah sebesar 4, dan itu bisa diperoleh dengan merespon strategi yang digunakan A dengan juga menerapkan strategi harga mahal (S3). Penggunaan strategi selain yang direkomendasikan di atas akan berdampak pada menurunnya keuntungan bagi A dan meningkatnya kerugian bagi B, atau tidak dapat selesainya persaingan atau permainan yang ada. (Aris B. Setyawan).

b) Dari contoh kasus pada pokok bahasan Srategi Campuran diatas yaitu pada kasus perusahaan A dan B, oleh karena adanya perkembangan yang terjadi di pasar, maka perusahaan A, yang tadinya hanya memiliki produk dengan harga murah dan mahal, sekarang menambah satu lagi strategi bersainganya dengan juga mengeluarkan produk berharga sedang, dan hasil yang diperoleh tampak pada tabel berikut ini.

		Perusahaan B		
		Strategi Harga Murah (S1)	Strategi Harga Sedang (S2)	Strategi Harga Mahal (S3)
Perusahaan A	Strategi Harga Murah (S1)	**2**	**5**	**7**
	Strategi Harga Sedang (S2)	**-1**	**2**	**4**
	Strategi Harga Mahal (S3)	**6**	**1**	**9**

Dari perkembangan kasus di atas, bagaimana strategi yang harus digunakan oleh masing-masing pemain atau perusahaan, agar masing-masing mendapatkan hasil yang optimal (kalau untung, keuntungan tersebut besar, dan kalau harus rugi maka

kerugian tersebut adalah paling kecil).

Penyelesaian

Langkah 1

Mula-mula akan dicoba dulu dengan menggunakan strategi murni. Seperti telah dijelaskan di atas, bagi pemain baris akan menggunakan aturan ***maximin*** dan pemain kolom akan menggunakan aturan ***minimax.*** Untuk pemain baris, pilih nilai yang paling kecil untuk setiap baris (Baris satu nilai terkecilnya 2 , untuk baris kedua nilai terkecilnya -1 dan baris tiga nilai terkecilnya 1). Selanjutnya dari dua nilai terkecil tersebut, pilih nilai yang paling baik atau besar, yakni nilai **2**.

		Perusahaan B			**Maksimin**
		Strategi Harga Murah (S1)	Strategi Harga Sedang (S2)	Strategi Harga Mahal (S3)	
Perusahaan A	Strategi Harga Murah (S1)	**2**	**5**	**7**	**2**
	Strategi Harga Sedang (S2)	**-1**	**2**	**4**	**-1**
	Strategi Harga Mahal (S3)	**6**	**1**	**9**	**1**

Langkah 2

Untuk pemain kolom, pilih nilai yang paling besar untuk setiap kolom (kolom satu nilai terbesarnya 6, kolom dua nilai terbesarnya 5, dan kolom tiga nilai terbesarnya 9). Selanjutnya dari tiga nilai terbesar tersebut, pilih nilai yang paling baik atau kecil bagi B, yakni nilai **5** (rugi yang paling kecil).

		Perusahaan B			**Maksimin**
		Strategi Harga Murah (S1)	Strategi Harga Sedang (S2)	Strategi Harga Mahal (S3)	
Perusahaan A	Strategi Harga Murah (S1)	**2**	**5**	**7**	**2**
	Strategi Harga Sedang (S2)	**-1**	**2**	**4**	**-1**
	Strategi Harga Mahal (S3)	**6**	**1**	**9**	**1**
Minimax		**6**	**5**	**9**	

Langkah 3

Dari tabel di atas terlihat bahwa pilihan pemain baris-A dan pemain kolom-B tidak sama, dimana pemain atau perusahaan A memilih nilai 2 dan perusahaan B memilih nilai 5, dengan demikian maka permainan ini dapat dikatakan belum optimal □karena belum ditemukan nilai permainan (titik keseimbangan) yang sama. Oleh karena itu perlu dilanjutkan dengan menggunakan strategi campuran, yang langkahnya adalah sebegai berikut :

Langkah 4

Masing-masing pemain akan menghilangkan strategi yang menghasilkan keuntungan atau kerugian paling buruk. Bila diperhatikan pada tabel sebelumnya, untuk pemain A, strategi S2 adalah paling buruk, karena bisa menimbulkan kemungkinan kerugian bagi A (-1). Dan bagi pemain B, strategi S3 adalah paling buruk karena kerugiannya yang bisa terjadi paling besar (perhatikan nilai-nilai kerugian di strategi S3 pemain/perusahaan B).

Langkah 5

Setelah pemain A membuang strategi S2 dan pemain B membuang stretgi S3, diperoleh tabel sebagiai berikut :

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Perusahaan B</td></tr>
<tr><td>Strategi Harga Murah (S1)</td><td>Strategi Harga Sedang (S2)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Perusahaan A</td><td>Strategi Harga Murah (S1)</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Strategi Harga Mahal (S3)</td><td>6</td><td>1</td></tr>
</table>

Perhatikan bahwa setelah masing-masing membuang strategi yang paling buruk, maka sekarang persaingan atau permainan dilakukan dengan kondisi, perusahaan A menggunakan strategi S1 dan S3, sementara perusahaan B menggunakan strategi S1 dan S2.

Langkah 6

Langkah selanjutnya adalah dengan memberikan nilai probabilitas terhadap kemugkinan digunakannya kedua strategi bagi masing-masing perusahaan. Untuk perusahaan A, bila kemungkinan keberhasilan penggunaan strategi S1 adalah sebesar **p**, maka kemungkinan keberhasilan digunakannya strategi S3 adalah **(1-p)**. Begitu pula dengan pemain B, bila kemungkinan keberhasilan penggunaan strategi S1 adalah sebesar **q**, maka kemungkinan keberhasilan digunakannya strategi S2 adalah **(1-q).**

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Perusahaan B</td></tr>
<tr><td>Strategi Harga Murah (S1) (q)</td><td>Strategi Harga Sedang (S2) (1-q)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Perusahaan A</td><td>Strategi Harga Murah (S1) (p)</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Strategi Harga Mahal (S3) (1-p)</td><td>6</td><td>1</td></tr>
</table>

Langkah 7

Selanjutnya mencari nilai besaran probabilitas setiap strategi yang akan digunakan dengan menggunakan nilai-nilai yang ada serta nilai probalitas masing-masing strategi untuk menghitung *titik keseimbangan* yang optimal, dengan cara sebagai berikut :

Untuk perusahaan A

Bila, apapun strategi yang digunakan A, perusahaan B meresponnya dengan strategi S1, maka :

2p + 6(1-p) = 2p + 6 – 6p = **6 – 4p**

Bila, apapun strategi yang digunakan A, perusahaan B meresponnya dengan strategi S2, maka :

5p + 1(1-p) = 5p + 1 – 1p = **1 + 4p**

Bila kedua hasil persamaan tersebut digabung, maka :

6-4p = 1 + 4p

5 = 8p

P = 5/8 = 0,625

Dan apabila nilai p = 0,625, maka nilai (1-p) adalah (1 – 0,625) = 0,375, sehingga kedua nilai probabilitas untuk strategi S1 dan S3 milik perusahaan A sudah diketahui nilainya. Apabila kedua nilai probabilitas tersebut dimasukkan dalam kedua persamaan di atas, maka keuntungan yang diharapkan oleh perusahaan A adalah :

Dengan persamaan ke-1	**Dengan persamaan ke-2**
= 2p + 6(1-p)	= 5p + 1(1-p)
= 2 (0,625) + 6 (0,375)	= 5 (0,625) + 1 (0,375)
= 3,5	**= 3,5**

Perhatikan, bahwa keduanya menghasilkan keuntungan yang diharapkan adalah\ sama, yakni sebesar 3,5. Coba diingat di atas, bahwa sebelum menggunakan strategi campuran ini keuntungan perusahaan A hanya sebesar 2, berarti dengan digunakan strategi campuran ini, keuntungan perusahaan A bisa meningkat 1,5 menjadi 3,5.

Bagaimana dengan perusahaan B ?

Untuk perusahaan B

Bila, apapun strategi yang digunakan B, perusahaan A meresponnya dengan strategi S1, maka :

2q + 5(1-q) = 2q + 5 – 5q = **5 – 3p**

Bila, apapun strategi yang digunakan B, perusahaan A meresponnya dengan strategi S3, maka :

6q + 1(1-q) = 6q + 1 – 1q = **1 + 5p**

5 – 3q = 1 + 5q

4 = 8q

q = 4/8 = 0,5

Dan apabila nilai p = 0,5, maka nilai (1-p) adalah (1 – 0,5) = 0,5, sehingga kedua nilai probabilitas untuk strategi S1 dan S2 milik perusahaan B sudah diketahui nilainya. Apabila kedua nilai probabilitas tersebut dimasukkan dalam kedua persamaan di atas, maka kerugian minimal yang diharapkan oleh perusahaan B adalah :

Dengan persamaan ke-1	**Dengan persamaan ke-2**
= 2q + 5(1-q)	= 6q + 1(1-q)
= 2 (0,5) + 5 (0,5)	= 6 (0,5) + 1 (0,5)
= 3,5	**= 3,5**

Perhatikan, bahwa keduanya menghasilkan kerugian minimal yang diharapkan adalah sama, yakni sebesar 3,5. Coba diingat di atas, bahwa sebelum menggunakan strategi campuran ini kerugian minimal perusahaan **B** adalah sebesar 5, berarti dengan digunakan strategi campuran ini, kerugian minimal perusahaan B bisa menurun sebesar 1,5 menjadi 3,5.

Kesimpulan :

Kerena penggunaan strategi murni belum mampu menemukan nilai permainan (titik keseimbangan) yang sama, maka penyelesaian masalah permainan/persaingan di atas dilanjutkan dengan digunakannya strategi campuran. Penggunaan strategi campuran ini terbukti, disamping mampu menemukan nilai permainan (titik keseimbangan) yang sama, strategi campuran ini juga mampu memberikan hasil yang lebih baik bagi masing-masing perusahaan. Perusahaan A keuntungan yang diharapkan naik menjadi 3,5 dan kerugian minimal yang diterima perusahaan B juga dapat turun hanya sebesar 3.5. → **Sudah optimal.**

Perhatikan Matriks Payoff berikut :

Pemain A	Pemain B					
		Strategi 1	Strategi 2	Strategi 3	Strategi 4	Strategi 5
	Strategi 1	2	4	5	-2	-1
	Strategi 2	3	-1	-2	6	5

Maka Bentuk Linear Programing (LP) untuk pemain baris (Pemain A) adalah :

$Min \quad z = X_1 + X_2$

Subjec To :

$$2X_1 + 3X_2 \geq 1$$

$$4X_1 - X_2 \geq 1$$

$$5X_1 - 2X_2 \geq 1$$

$$-2X_1 + 6X_2 \geq 1$$

$$-X_1 + 5X_2 \geq 1$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Maka bentuk umum LP untuk pemain kolom (Pemain B) adalah :

$Maks \quad w = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$

Sub. To :

$$2Y_1 + 4Y_2 + 5Y_3 - 2Y_4 - Y_5 \leq 1$$

$$3Y_1 - Y_2 - 2Y_3 + 6Y_4 + 5Y_5 \leq 1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \geq 0$$

Tabel simpleks awal (iterasi-0) :

VB	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	S1	S2	NK	Rasio
W	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	
s1	2	4	5	-2	-1	1	0	1	1/5
s2	3	-1	-2	6	5	0	1	1	-1/2

Iterasi -1 :

VB	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	S1	S2	NK	Rasio
W	-3/5	-1/5	0	-7/5	-6/5	1	0	1/5	
Y3	2/5	4/5	1	-2/5	-1/5	1	0	1/5	-1/2
s2	19/5	-3/5	0	26/5	23/5	2	1	7/5	26/7

Iterasi-2 :

VB	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	S1	S2	NK	Rasio
W	11/26	-1/26	0	0	1/26	6/13	7/26	15/26	
Y3	9/13	11/13	1	0	5/26	15/13	1/13	4/13	4/11
s2	19/26	3/26	0	1	23/26	5/13	5/26	7/26	7/3

Karena nilai baris w di bawah variabel Y_2 masih negatif, maka tabel belum optimal.

Iterasi-3 : optimal

VB	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	S1	S2	NK
W	5/11	0	1/22	0	0.0472	7/22	3/11	13/22
Y3	9/11	1	13/11	0	5/22	15/11	1/11	4/11
s2	7/11	0	-3/22	1	0.85839	5/22	2/11	5/22

$Y_1 = Y_3 = Y_5 = 0$ $y_1 = y_3 = y_5 = 0;$ w=13/22 $v = \frac{1}{w} = \frac{1}{13/22} = 22/13$

$Y_3 = 4/11$ $Y_3 = \frac{Y_3}{w} = \frac{4/11}{13/22} = 8/13;$ $Y_4 = 5/22$ $Y_4 = \frac{y_4}{w} = \frac{5/22}{13/22} = 5/13$

$z = w = \frac{13}{22};\ X_1 = s_1 = 7/22$ $X_1 = \frac{X_1}{z} = \frac{7/22}{13/22} = 7/13$

$X_2 = s_2 = 3/11$ $X_2 = \frac{X_2}{z} = \frac{3/11}{13/22} = 6/13$

5 Soal Mandiri dan Tim

a. Temukan titik sadel dan nilai permainan untuk masing-masing dari kedua permainan berikut ini. Matriks hasil ini adalah untuk pemain A.

(1)

	B			
	8	6	2	8
A	8	9	4	5
	7	5	3	5

(2)

	B			
	4	-4	-5	6
A	-3	-4	-9	-2
	6	7	-8	-9
	7	3	-9	5

b. Temukan kisaran nilai untuk “p” dan “q” yang akan membuat entri (2,2) menjadi titik beban dalam permainan berikut.

(I)

	B		
	1	q	6
A	p	5	10
	6	2	3

(II)

	B		
	2	4	5
A	10	7	q
	4	p	6

c. Tunjukkan apakah nilai-nilai dari permainan berikut lebih besar dari, lebih kecil dari, atau sama dengan nol.

	B			
A	1	9	6	0
	2	3	8	4
	-5	-2	10	-3
	7	4	-2	-5

(I)

	B			
A	3	7	-1	3
	4	8	0	-6
	6	-9	-2	4

(II)

	B			
A	-1	9	6	8
	-2	10	4	6
	5	3	0	7
	7	-2	8	4

(III)

	B		
A	3	6	1
	5	2	3
	4	2	-5

(IV)

d. Dua perakit mobil A dan B bersaing untuk merebut pasar yaitu meningkatkan mark share. Masing-masing perakit mempunyai 3 strategi yaitu (1) tidak mengadakan perubahan model mobil (2) mengadakan sedikit perubahan , (3) mengadakan sedikit perubahan besar-besaran sekali lagi baris untuk A dan kolom untuk B, kalau A memilih strategi 3 (baris 3) dan B strategi 1 (kolom 1), market share A naik 8 %. Semua nilai pay off, dapat dilihat dalam matriks di bawah ini!

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & & B & \\
 & & & 1 & 2 & 3 \\
\hline
 & & 1 & 0 & -4 & -10 \\
A & & 2 & 3 & 0 & -5 \\
 & & 3 & 8 & 1 & 0
\end{array}
$$

Pertanyaan: Dengan menggunakan strategi minimaks dan maksimin cari nilai permainan! Apa ada titik sadelnya.

e. Tentukan nilai optimum dari matriks pay off berikut ini dengan menggunakan cara metode grafik!

Perhatikan matriks pay off di bawah ini !

Pemain A	Pemain B					
		Strategi 1	Strategi 2	Strategi 3	Strategi 4	Strategi 5
	Strategi 1	2	4	5	-2	-1
	Strategi 2	3	-1	-2	6	5

f. Diberikan matriks pembayaran sebagai berikut. Carilah strategi optimum untuk P1 dan P2.

	P_2			
P_1	j i	y1	y2	y3
	X_1	-1	1	3
	X_2=1-X_1	5	3	-3

g. Carilah nilai optimal pemain A dan pemain B dari tabel permainan ini dengan menggunakan metode grafik.

	B	
A	1	2
	5	6
	-7	9
	-4	-3
	2	1

h. Carilah nilai optimal pemain A dan pemain B dari tabel permainan ini dengan menggunakan metode grafik.

	B	
A	1	2
	5	6
	-7	9
	-4	-3
	2	1

i. Consider the game

		B 1	2	3
	1	5	50	50
A	2	1	1	0.1
	3	10	1	10

Verify that the strategic (1/6, 0, 5/6) for player A and (49/54, 5/54, 0) for player B are Optimal and find the value of the game.

j. Untuk tujuan maksimasi, selesaikanlah permasalahan berikut ini!

VB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	NK	Rasio
Z	-1	**-1**	**-**1	0	0	0	0	
S_1	-1	1	1	1	0	0	1	
S_2	2	-2	2	0	1	0	1	
S_3	3	3	-3	0	0	1	1	