TRƯỜNG THPT THÀNH PHỐ CAO LÃNH
TÀI LIỆU
ÔN THI VÀO CÁC LỚP CHUYÊN

MÔN TOÁN

Năm học 2010-2011

Giáo viên biên soạn và giảng dạy :

Huỳnh Chí Hào

Chuyên đề 1:

ĐA THỨC

I. Đa thức : (Đa thức một biến)

1. Định nghĩa: Đa thức bậc n theo x ($n \in \mathbb{N}$) là biểu thức có dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{với } a_n \neq 0$$

Các số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gọi là các hệ số , n gọi là bậc của đa thức P(x)

Ví dụ: $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ là đa thức bậc ba.

2. Đa thức đồng nhất:

a) Đa thức đồng nhất:

Định nghĩa : Đa thức đồng nhất là những đa thức luôn luôn có cùng giá trị với bất cứ giá trị nào của biến số.

- Nếu P(x) và Q(x) là hai đa thức đồng nhất ta ký hiệu : $P(x) \equiv Q(x)$

$$\left[P(x) \equiv Q(x)\right] \Leftrightarrow \left[\forall x \in \mathbb{R} : P(x) = Q(x)\right]$$

b) Đa thức đồng nhất không:

Định nghĩa : Đa thức đồng nhất không là những đa thức luôn luôn bằng 0 với bất cứ giá trị nào của biến số

- Nếu P(x) đa thức đồng nhất không ta ký hiệu : $P(x) \equiv 0$

$$\left[P(x) \equiv 0\right] \Leftrightarrow \left[\forall x \in \mathbb{R} : P(x) = 0\right]$$

Hệ quả:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ a_{n-1} = 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Ví dụ: Tìm các hằng số A, B, C sao cho $3x^2 + 3x + 3 = A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2$ với mọi x

Ví dụ: Tìm các hệ số a, b để đa thức $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ là bình phương của một đa thức

Bài giải:
Giả sử

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + mx + n)^2 \qquad \text{với mọi x}$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b = x^4 + m^2x^2 + n^2 + 2mx^3 + 2nx^2 + 2mnx \qquad \text{với mọi x}$$

$$\Rightarrow (2m-2)x^3 + (m^2 + 2n - a)x^2 + (2mn-2)x + n^2 - b = 0 \qquad \text{với mọi x}$$

Áp dụng định lý về đa thức đồng nhất không ta được:

$$\begin{cases} 2m - 2 = 0 \\ m^2 + 2n - a = 0 \\ 2mn - 2 = 0 \\ n^2 - b = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $\begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$. Vậy khi $a = 3;\ b = 1$ thì $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$

3. Nghiệm của đa thức:

- **Nếu khi x = a đa thức P(x) có giá trị bằng 0 thì ta nói a là một nghiệm của P(x)**

$$\left[\text{a là một nghiệm của P(x)}\right] \overset{\text{đn}}{\Leftrightarrow} \left[P(a) = 0\right]$$

Ví dụ: Cho phương trình $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$ (1)
Chứng minh rằng $x = 1$ là nghiệm của phương trình (1)

4. Phép chia đa thức:

Định lý: Cho hai đa thức P(x) và Q(x) khác không. Tồn tại duy nhất đa thức h(x) và r(x) sao cho

$$P(x) = Q(x).h(x) + r(x)$$

Trong đó $r(x) = 0$ hoặc $r(x) \neq 0$ và bậc của r(x) nhỏ hơn bậc của Q(x)

Đa thức Q(x) gọi là thương và đa thức r(x) gọi là dư của phép chia P(x) cho Q(x)

Ví du 1: Tìm thương và dư của phép chia đa thức $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ cho đa thức $x - 1$

Ví dụ 2: Cho đa thức $P(x) = x^4 - 3x^3 + bx^2 + ax + b$ và $Q(x) = x^2 - 1$
Tìm a, b để f(x) chia hết cho g(x).

Bài giải:

Vì $P(x) \vdots Q(x)$ nên ta có thể giả sử rằng $P(x) = (x^2 - 1).Q(x)$ (1) với mọi x

Thay $x = 1$ vào hai vế của (1) ta được: $P(1) = 1 - 3 + b + a + b = 0 \Rightarrow a + 2b = 2$ (2)

Thay $x = -1$ vào hai vế của (1) ta được: $P(-1) = 1 + 3 + b - a + b = 0 \Rightarrow -a + 2b = -4$ (3)

Từ (2) và (3) ta suy ra được $a = 3; b = -\dfrac{1}{2}$.

5. Định lý BEZOUT (Bơ -Du) (1739 - 1783)

Định lý BEZOUT:

Định lý: Trong phép chia P(x) cho (x - a) thì số dư là $R = P(a)$

Chứng minh:

Chia đa thức P(x) cho (x - a), giả sử được thương là Q(x) và dư là hằng số R. Ta có:

$$P(x) = (x - a).Q(x) + R \text{ với mọi } x$$

Do đó với x = a thì $P(a) = 0.Q(a) + R \Rightarrow R = P(a)$ (đpcm)

Hệ quả: $\left[\text{ P(x) chia hết cho } (x-a)\right] \Leftrightarrow \left[P(a) = 0\right]$

Hệ quả: Đa thức P(x) có nghiệm là a khi và chỉ khi $P(x) \vdots (x\text{-}a)$

$\left[P(a) = 0\right] \Leftrightarrow \left[P(x) = (x-a).Q(x), \text{ trong đó } Q(x) \text{ là một đa thức}\right]$

Ví dụ: Cho $P(x) = x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$

Tìm dư của phép chia P(x) cho $x - 1$

6. Sơ đồ HOOCNE Horner 1786 - 1837)

Để tính các hệ số của đa thức thương và dư của phép chia đa thức

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ cho (x - a) ta có thể dùng sơ đồ **HOOCNE** sau đây

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}		a_1	a_0
a	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}		b_1	b_0

Trong đó:

$b_n = a_n$

$b_{n-1} = a.b_n + a_{n-1}$

$b_{n-2} = a.b_{n-2} + a_{n-2}$

.

.

.

$b_0 = a.b_1 + a_0$

Khi đó:

- $P(x) = (x-a).Q(x) + r$
- Thương là : $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ... + b_1$
- Dư là : $r = b_0$

Ví dụ 1: Tìm thương và dư của phép chia đa thức $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ cho đa thức $x - 1$

Ví dụ 2: Tìm thương và dư của phép chia đa thức $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4x - 5$ cho đa thức $x + 1$

7. Phân tích đa thức ra thừa số

Định lý: Giả sử đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$ có n nghiệm là $x_1, x_2, ..., x_n$ thì

$$P(x) = a_n\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)...\left(x - x_n\right)$$

Ví dụ: Phân tích đa thức $P(x) = x^3 + 9x^2 + 11x - 21$ thành nhân tử

Ví dụ: Rút gọn phân thức $A = \dfrac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}$

--------------------------Hết--------------------------

Chuyên đề 2:

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC NGUYÊN VÀ PHÂN THỨC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ:

Các hằng đẳng thức cơ bản và mở rộng :

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \rightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

8. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

9) $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

10) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$

Hệ quả: Nếu $a+b+c=0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

11) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$

Ví dụ 1: Rút gọn các phân thức sau

1) $A = \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2}$

2) $B = \frac{4x^2 - (x-3)^2}{9(x^2-1)} - \frac{x^2-9}{(2x+3)^2 - x^2} + \frac{(2x-3)^2 - x^2}{4x^2 - (x+3)^2}$

Ví dụ 2: 1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 2x^2 - 6x + 1$

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Phương pháp:

Để tìm **GTLN** của biểu thức A (phụ thuộc vào một hay nhiều biến) ta có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Chứng minh : $A \leq$ hằng số M

Bước 2: Chỉ ra các biến để $A = M$

Bước 3: Kết luận GTLN của A là M.

Để tìm **GTNN** của biểu thức A (phụ thuộc vào một hay nhiều biến) ta có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Chứng minh : $A \geq$ hằng số m

Bước 2: Chỉ ra các biến để $A = m$

Bước 3: Kết luận GTNN của A là m

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ thì $a=b=c$

II. BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Bài 1: Cho $M=\left(\dfrac{x+2}{3x}+\dfrac{2}{x+1}-3\right):\dfrac{2-4x}{x+1}-\dfrac{3x-x^2+1}{3x}$

1) Rút gọn M thành một phân thức
2) Với giá trị nào của x thì $M<0$
3) Tìm $x\in\mathbb{Z}$ để $\dfrac{1}{M}\in\mathbb{Z}$

Bài giải:

1) Điều kiện của biến là: $\begin{cases}x\neq 0\\ x+1\neq 0\\ 2-4x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq -1\\ x\neq \dfrac{1}{2}\end{cases}$

Khi đó:

$$\begin{aligned}M&=\left(\frac{x+2}{3x}+\frac{2}{x+1}-3\right):\frac{2-4x}{x+1}-\frac{3x-x^2+1}{3x}\\&=\frac{(x+2)(x+1)+6x-9x(x-1)}{3x(x+1)}:\frac{2-4x}{x+1}-\frac{3x-x^2+1}{3x}\\&=\frac{2-8x^2}{3x(x+1)}:\frac{2-4x}{x+1}-\frac{3x-x^2+1}{3x}\\&=\frac{2(1+2x)(1-2x)}{3x(x+1)}.\frac{x+1}{2(1-2x)}-\frac{3x-x^2+1}{3x}\\&=\frac{1+2x}{3x}-\frac{3x-x^2+1}{3x}\\&=\frac{x^2-x}{3x}=\frac{x-1}{3}\end{aligned}$$

2) Ta có: $M<0\Leftrightarrow x-1<0\Leftrightarrow x<1$

Kết hợp với điều kiện của biến ta có kết quả: $\begin{cases}x<1\\ x\neq 0\\ x\neq -1\\ x\neq \dfrac{1}{2}\end{cases}$

3) Ta có: $\dfrac{1}{M}=\dfrac{3}{x-1}$

Để $\dfrac{1}{M}\in\mathbb{Z}$ khi $x\in\mathbb{Z}$ thì ta phải có:

$$x-1 \text{ là ước của } 3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=1\\ x-1=-1\\ x-1=3\\ x-1=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0\\ x=4\\ x=-2\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện của x ta có đáp số là: $x=-2; x=2; x=4$

Bài 3: Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-2\right):\dfrac{1}{x-1}$

Bài giải:

Điều kiện của biến là : $\begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne 1 \end{cases}$

Đặt: $\sqrt{x}=a$ với $\begin{cases} a\ge 0 \\ a\ne 1 \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
P&=\left(\frac{3a^2+3a-3}{a^2+a-2}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+2}-2\right):\frac{1}{a^2-1}\\
&=\frac{3a^2+3a-3+a+2+a-1-2\left(a^2+a-2\right)}{(a-1)(a+2)}:\frac{1}{a^2-1}\\
&=\frac{a^2+3a+2}{(a-1)(a+2)}:\frac{1}{a^2-1}\\
&=\frac{(a+2)(a+1)}{(a-1)(a+2)}.\left(a^2-1\right)=(a+1)^2
\end{aligned}$$

Vậy: $P=(\sqrt{x}+1)^2$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ TỰ GIẢI:

Bài 1: Cho biểu thức: $M=\left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x-1}-\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$

Tìm các giá trị của x để M có nghĩa, khi đó hãy rút gọn M.

Đáp số: $\begin{cases}x>0\\x\neq 1\end{cases};M=\frac{2-\sqrt{x}}{x}$

Bài 2: Cho biểu thức: $M=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}-\frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(2-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

Tìm các giá trị của x để M có nghĩa, khi đó hãy rút gọn M.

Đáp số: $\begin{cases}x\geq 0\\x\neq 4\\x\neq 9\end{cases};M=\frac{\sqrt{x}+1}{x-4}$

Bài 3: Cho biểu thức: $M=1-\left[\frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x}+\frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right].\left[\frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1}\right]$

Tìm các giá trị của x để M có nghĩa, khi đó hãy rút gọn M.

Đáp số: $\begin{cases}x\geq 0\\x\neq 1\\x\neq \frac{1}{4}\end{cases};M=\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}$

Bài 4: Cho biểu thức: $M=\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$

Tìm các giá trị của x để M có nghĩa, khi đó hãy rút gọn M.

Đáp số: $\begin{cases}x\geq 0\\x\neq 4\\x\neq 9\end{cases};M=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho $x \neq 0$ và $x+\frac{1}{x}=a$ là một hằng số . Tính theo a các biểu thức :

$$A=x^3+\frac{1}{x^3} \quad ; \quad B=x^6+\frac{1}{x^6} \quad ; \quad C=x^7+\frac{1}{x^7}$$

Bài giải:

Ta luôn có hệ thức: $x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$ với $n>1$

Cho $n=2$ ta sẽ có: $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$

Với $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=a^2-2$

Ta tính được:

$$A=a^3-3a$$

$$B=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-2=\left(a^3-3a\right)^2-2=a^6-6a^4+9a^2-2$$

$$C=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=a^7-7a^5+14a^3-7a$$

Bài 2: Cho $x>0$ thỏa mãn $x^2+\frac{1}{x^2}=7$. Chứng minh rằng $x^5+\frac{1}{x^5}$ là một số nguyên. Tìm số nguyên đó

Bài giải:

Ta có: $x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$

Do: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=7+2=9 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$ (do $x>0$)

Mặt khác:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=7.3-3=18$$

Và $\quad x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=49-2=47$

Nên $\quad x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=47.3-18=123$

Bài 2: Cho ba số x,y,z thỏa mãn đồng thời :

$$\begin{cases} x^2+2y+1=0 \\ y^2+2z+1=0 \\ z^2+2x+1=0 \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức : $A=x^{2009}+y^{2009}+z^{2009}$

Bài giải:

Cộng từng vế các đẳng thức đã cho và biến đổi ta được;

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y+1=0 \\ z+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=x=-1$$

Vậy $A=(-1)^{2009}+(-1)^{2009}+(-1)^{2009}=-3$

Bài 4: Cho $M=\dfrac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$. Tìm các giá trị nguyên của a để M có giá trị nguyên

Bài giải:

Rút gọn biểu thức M

$$M=\frac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$$
$$=\frac{a^4-16}{(a-2)(a^3-2a^2+4a-8)}$$
$$=\frac{(a^2+4)(a+2)(a-2)}{(a-2)(a-2)(a^2+4)}$$

Với $a\neq\pm2$ thì $A=\dfrac{a+2}{a-2}$

Tìm $a\in\mathbb{Z}$ để $A\in\mathbb{Z}$

Tiếp tục biến đổi A thành $A=\dfrac{a+2}{a-2}=1+\dfrac{4}{a-2}$

Để $A\in\mathbb{Z}$ khi $a\in\mathbb{Z}$ thì ta phải có:

$$a-2 \text{ là ước của } 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=1 \\ a-2=-1 \\ a-2=-2 \\ a-2=2 \\ a-2=-4 \\ a-2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=1 \\ a=0 \\ a=4 \\ a=-2 \\ a=6 \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện của a ta có đáp số là: $a=0; a=1; a=3; a=4; a=6$

Bài 6: Chứng minh rằng:

1) $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

2) $\dfrac{1}{(3x-1)(3x+2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3x-1}-\dfrac{1}{3x+2}\right)$

3) $\dfrac{1}{(x-1)x(x+1)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)x}-\dfrac{1}{x(x+1)}\right]$

Ap dụng: Tính các tổng sau:

$$1)\ S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)}$$

$$2)\ S_n = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$3)\ S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

III. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ ỨNG DỤNG BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ TRONG GIẢI TOÁN:

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2x^2 - 6x + 1$

Bài giải:
Biến đổi biểu thức A

$$A = 2(x^2 - 3x) + 1$$
$$= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 1 - \frac{9}{2}$$
$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} \geq -\frac{7}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$. Vậy $\min A = -\frac{7}{2}$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

Bài giải:
Biến đổi biểu thức A

$$A = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3)$$
$$= (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6)$$
$$= (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = -5$. Vậy $\min A = -36$

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 2012$

Bài giải:
Biến đổi biểu thức 4A

$$4A = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12x - 12y + 4.2012$$
$$= x^2 + 2xy + y^2 + 3(x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y) + 4.2012 - 12$$
$$= (x-y)^2 + 3(x+y-2)^2 + 4.2009$$
$$\Rightarrow A \geq 2009$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy $\min A = 2009$

------------------------------Hết--------------------------------

Chuyên đề 3:

BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC CÓ CHỨA CĂN THỨC

I. MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC CƠ BẢN:

Biến đổi căn thức bậc hai:

- $\sqrt{A^2} = |A|$ **(thường dùng)**
- $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A \quad (A \ge 0)$
- $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B} \quad (A \ge 0; B \ge 0)$
- $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \ge 0,\ B > 0)$
- $\sqrt{A^2.B} = |A|.\sqrt{B} \quad (B \ge 0)$

Chú ý: $\boxed{\sqrt{A} \text{ có nghĩa khi } A \ge 0}$

Biến đổi căn thức bậc ba:

- $\sqrt[3]{A^3} = A$
- $\sqrt[3]{A.B} = \sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}} \quad (B \ne 0)$
- $\sqrt[3]{A^3.B} = A.\sqrt[3]{B}$

Ví dụ 1: 1) Tính: $A = \sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \dfrac{1}{5}\sqrt{125}$

2) Rút gọn biểu thức: $B = \left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right) : \dfrac{4a+4}{a-1}$ với $a \ge 0; a \ne 1$

Ví dụ 2: Hãy rút gọn các biểu thức sau:

1) $A = \left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}\right) : \dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

2) $B = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} \quad (x \ge 0; x \ne 1)$

Ví dụ 3: Cho biểu thức $K = \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{1}{a-\sqrt{a}}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+1} + \dfrac{2}{a-1}\right)$

1) Rút gọn biểu thức K.

2) Tính giá trị của K khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$

II. BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Bài 1: Chứng minh đẳng thức : $\dfrac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=1 \quad (1)$

Bài giải:

$$VT(1)=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\left(2\sqrt{3}+1\right)}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{3}-1}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=1$$

Bài 2: Chứng minh đẳng thức : $\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{3}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}+\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=1 \quad (1)$

Bài giải:

$$VT(1)=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}}$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4}}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}}}$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}+\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{6}=\frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{6}=1$$

Bài 3: Chứng minh đẳng thức : $\dfrac{\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}}{2}=\sqrt{3}\quad (1)$

Bài giải:

$$\mathrm{VT}(1)=\frac{\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}}{2}=\frac{\sqrt[4]{\left(5+2\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt[4]{\left(5-20\sqrt{6}\right)^2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{\left(5+2\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt[4]{\left(5-20\sqrt{6}\right)^2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4}+\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{3}$$

Bài 4: Cho a ≥ 0. Chứng minh rằng : $\dfrac{a^2-\sqrt{a}}{a^2+\sqrt{a}+1}-\dfrac{a^2+\sqrt{a}}{a^2-\sqrt{a}+1}+a+1=(\sqrt{a}-1)^2$

Hướng dẫn:
Đặt ẩn phụ: $\sqrt{a}=x$

Bài 5: Xét biểu thức $P=\dfrac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2}-\dfrac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}-1$. Tìm a để $|P|=1$

Hướng dẫn:
Đặt ẩn phụ: $\sqrt{a}=x$

Bài 6: Rút gọn biểu thức : $A=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

Đáp số: $A=1$

Bài 7: Thu gọn biểu thức : $P=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

Đáp số: $P=1+\sqrt{2}$

Bài 8: Cho $M=\sqrt{\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+x+1}$

Rút gọn M với $0\leq x\leq 1$

Hướng dẫn:
+ Đặt $\sqrt{x}=a$
+ Kết quả: $M=1-\sqrt{x}$

Bài 9: Tính giá trị của biểu thức : $A=(3x^3+8x^2+2)^{2009}$ với $x=\dfrac{(\sqrt{5}+2)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$

Hướng dẫn:

+ Rút gọn x sẽ được $x=\dfrac{1}{3}$

+ Thay x vào A sẽ được $A=3^{2009}$

Bài 10: Cho $x = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$. Tính giá trị của biểu thức : $A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2007}$

Hướng dẫn:
+ Rút gọn x
+ Thay x vào A

Bài 11: Tính giá trị của biểu thức : $P = (x^4 - 4x^2 + 3)^{2007}$

với giá trị $x = \dfrac{\sqrt{3\sqrt{10}-9}}{\sqrt{6+\sqrt{19-6\sqrt{10}}}}(\sqrt{10}+3)$

Hướng dẫn:
+ Rút gọn x
+ Thay x vào A

Bài 12: Cho số $x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

1) Chứng tỏ x là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x - 18 = 0$.

2) Tính x.

Hướng dẫn:

1) Ta có:

$$x = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 18 + 3.x.\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 18 + 3x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 18 = 0$$

Suy ra x là nghiệm của phương trình $x^3 - 3x - 18 = 0$

2) Giải phương trình (1) được $x = 3$

Bài 13: Chứng minh rằng $x = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$ là một số nguyên.

Hướng dẫn:

Giải tương tự bài 12

Bài 14: Chứng minh rằng số : $x_0 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

là một nghiệm của phương trình : $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$.

Bài giải:

Biến đổi phương trình:

$$x^4 - 16x^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 8\right)^2 = 32 \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh: $\left(x_0^2 - 8\right)^2 = 32$

Thật vậy:

$$x_0 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}} \Rightarrow x_0^2 = 8 - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$\Rightarrow x_0^2 - 8 = -2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{3\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(x_0^2 - 8\right)^2 = 4\left(2+\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}-3\sqrt{3\left(4-3\right)}\right) = 32$$

Vậy x_0 là nghiệm của phương trình $x^4 - 16x^2 + 32 = 0$

Bài 18:

1) Chứng minh rằng : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

2) Tính tổng:

$$S=\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

------------------------------Hết----------------------------

Chuyên đề 4:

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Nhắc lại:

1) Một số phép biến đổi tương đương phương trình thường sử dụng

a) **Chuyển vế** một biểu thức từ vế này sang vế kia (nhớ đổi dấu của biểu thức).
b) **Nhân hoặc chia hai vế** của phương trình với một hằng số (khác 0) hoặc với một biểu thức (khác không).
c) **Thay thế** một biểu thức bởi một biểu thức khác bằng với biểu thức đó.

Chú ý: Sử dụng dấu $\Leftrightarrow$ khi thực hiện các phép biến đổi tương đương.

Lưu ý:

+ Chia hai vế của phương trình cho biểu thức chứa ẩn đề phòng mất nghiệm.
+ Bình phương hai vế của phương trình đề phòng dư nghiệm.

2) Các bước giải một phương trình

Bước 1: Tìm điều kiện (nếu có) của ẩn số để hai vế của pt có nghĩa
Bước 2: Sử dụng các phép **biến đổi tương đương** để biến đổi pt đến một pt **đã biết cách giải**
Bước 3: Giải pt và chọn nghiệm phù hợp (nếu có)
Bước 4: Kết luận

I. Phương trình bậc nhất:

1. Dạng : $\boxed{ax + b = 0 \ (1)}$ $\qquad \begin{cases} x: \text{ẩn số} \\ a, b: \text{tham số} \end{cases}$

2. Giải và biện luận:

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ ax = -b (2)

- Nếu a $\neq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$
- Nếu a = 0 thì (2) trở thành 0.x = -b
  * Nếu b $\neq 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm
  * Nếu b = 0 thì phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x

Tóm lại :

- a $\neq 0$: phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$
- a = 0 và b $\neq 0$: phương trình (1) vô nghiệm
- a = 0 và b = 0 : phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x

Áp dụng:

Ví dụ : Giải các phương trình sau: $m^2x + 2 = x + 2m$

3. Điều kiện về nghiệm số của phương trình:

Định lý: Xét phương trình ax + b = 0 (1) ta có:

- (1) có nghiệm duy nhất ⇔ $a \neq 0$
- (1) vô nghiệm ⇔ $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$
- (1) nghiệm đúng với mọi x ⇔ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

Áp dụng:

Ví dụ :

1) Với giá trị nào của a, b thì phương trình sau nghiệm đúng với mọi x

$$a^4 - (x+1)a^2 + x - b = 0$$

2) Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm

$$\frac{x-m}{x+1} = \frac{x-2}{x-1}$$

II. Phương trình bậc hai: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad \textbf{(1)} \quad (a \neq 0)}$

1. Cách giải:

Tính biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$)

☞ Nếu $\Delta < 0$ thì pt (1) vô nghiệm

☞ Nếu $\Delta = 0$ thì pt (1) có nghiệm số kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ($x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$)

☞ Nếu $\Delta > 0$ thì pt (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ($x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$)

Ví dụ: Giải phương trình $\frac{1}{x-2} + \frac{3}{6-x} = 2$

2. Trường hợp đặc biệt:

☞ Nếu pt (1) có các hệ số thoả mãn a+b+c = 0 thì pt (1) có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a}$

☞ Nếu pt (1) có các hệ số thoả mãn a-b+c = 0 thì pt (1) có hai nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{c}{a}$

3. Điều kiện về nghiệm số của bậc hai:

Định lý : Xét phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$)

☞ Pt (1) vô nghiệm ⇔ $\Delta < 0$

☞ Pt (1) có nghiệm kép ⇔ $\Delta = 0$

☞ Pt (1) có hai nghiệm phân biệt ⇔ $\Delta > 0$

☞ Pt (1) có nghiệm (hoặc có hai nghiệm) ⇔ $\Delta \geq 0$

Đặc biệt :

Nếu pt(1) có hệ số a,c thoả a.c < 0 thì pt(1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

4. Định lý VIÉT đối với phương trình bậc hai:

☞ **Định lý thuận**: Nếu phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$\boxed{\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}}$$

☞ **Định lý đảo** : Nếu có hai số x, y mà $x + y = S$ và $x.y = P$ $(S^2 \ge 4P)$ thì x, y là nghiệm của phương trình

$$\boxed{X^2 - S.X + P = 0}$$

☞ **Ý nghĩa của định lý VIÉT:**

Cho phép tính giá trị các biểu thức đối xứng của các nghiệm và xét dấu các nghiệm mà không cần giải phương trình .

Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm $x_1$và x_2 của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là biểu thức có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị x_1 , x_2

Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1, x_2 theo S và P

VÍ DỤ:

Ký hiệu $S_n = x_1^n + x_2^n$. Ta lần lượt có:

$$S_1 = x_1 + x_2 = S$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$$

$$S_4 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = S_2^2 - 2P^2$$

$$S_5 = x_1^5 + x_2^5 = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2x_2^2(x_1 + x_2) = S_3S_2 - P^2S_1$$

$$S_6 = x_1^6 + x_2^6 = (x_1^3 + x_2^3)^2 - 2x_1^3x_2^3 = S_3^2 - 2P^3$$

$$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1^3 + x_2^3) - x_1^3x_2^3(x_1 + x_2) = S_4S_3 - P^3S_1$$

$$S_8 = x_1^8 + x_2^8 = (x_1^4 + x_2^4)^2 - 2x_1^4x_2^4 = S_4^2 - 2P^4$$

$$S_9 = x_1^9 + x_2^9 = (x_1^5 + x_2^5)(x_1^4 + x_2^4) - x_1^4x_2^4(x_1 + x_2) = S_5S_4 - P^4S_1$$

$$S_{10} = x_1^{10} + x_2^{10} = (x_1^5 + x_2^5)^2 - 2x_1^5x_2^5 = S_5^2 - 2P^5$$

Tính tương tự cho: S_{11}, S_{12}, ...

Ví dụ 1:

Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

1. Hãy lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $2x_1 - x_2$ và $2x_2 - x_1$
2. Hãy tính giá trị của biểu thức

a) $A = x_1^2 + x_2^2$ b) $B = x_1^3 + x_2^3$ c) $C = x_1^4 + x_2^4$

d) $D = x_1^5 + x_2^5$; e) $E = x_1^6 + x_2^6$ f) $F = x_1^7 + x_2^7$

Ví dụ 2: Cho phương trình: $x^2 + 5x + 2 = 0$

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm. Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = x_1^6 + x_2^6$ b) $B = x_1^8 + x_2^8$

Ví dụ 3: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x\sqrt{3} + 8 = 0$

Tính giá trị của các biểu thức:

$$Q = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2}$$

Ví dụ 4: Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \ne 0)$

a) Tính giá trị của biểu thức : $A = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4}$ theo a, b, c

b) Chứng minh rằng : $\frac{1}{(1+\sqrt{3})^4} + \frac{1}{(1-\sqrt{3})^4} = \frac{7}{2}$

c) Chứng minh rằng : $(1+\sqrt{2})^6 + (1-\sqrt{2})^6 = 198$

5. <u>Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai</u>:

a. <u>Định lý:</u> Xét phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ($a \neq 0$)

☞ Pt (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

☞ Pt (1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

☞ Pt (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ $P < 0$

Ví dụ: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 4m + 5 = 0$

Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương.

b. **<u>Mọi tam thức bậc hai f(x) = ax²+bx+c (a≠0) điều có thể biểu diễn thành</u>**

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}}$$

Ví dụ: Tìm giá trị giá trị nhỏ nhất của tam thức $f(x) = 2x^2 + 5x - 12$

Ví dụ: Tìm giá trị giá trị lớn nhất của phân thức $\frac{2}{x^2 - x + 1}$

Ví dụ: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 4 = 0$

1) Chứng minh pt (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m

2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của pt. Tìm GTNN của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$

c. <u>Công thức phân tích tam thức bậc hai thành nhân tử</u>:

Nếu tam thức bậc hai f(x)=$ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
có hai nghiệm là x_1,x_2 thì tam thức được phân tích thành :

$$\boxed{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$$

Ví dụ: Phân tích thành nhân tử biểu thức $-2x^2 - xy + y^2 + 5x - y + 2$

d. <u>Dấu cuả nhị thức bậc nhất f(x) = ax+b (a≠0)</u>

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f(x)		Trái dấu a	0	Cùng dấu a	

Ví dụ: Giải bất phương trình: $\frac{2x-3}{3-x} > 0$

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN QUY VỀ BẬC HAI BẰNG PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ

1.<u>Dạng I</u>: $\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)}$

☞ Đặt ẩn phụ : t = x^2

Ví dụ: Giải phương trình: $9x^4 + 2x^2 - 32 = 0$

2. <u>Dạng II</u>. $\boxed{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = k \quad (k \neq 0) \text{ trong đó } a+b = c+d}$

☞ Đặt ẩn phụ : t = (x+a)(x+b)

3.<u>Dạng III</u>: $\boxed{(x+a)^4 + (x+b)^4 = k \quad (k \neq 0)}$

☞ Đặt ẩn phụ : t = $x + \frac{a+b}{2}$

4.<u>Dạng IV</u>: $\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0}$

Chia hai vế phương trình cho x^2

☞ Đặt ẩn phụ : t = $x \pm \frac{1}{x}$

III . PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

$$\boxed{ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (1) \quad (a\neq 0)}$$

1.Cách giải: **Áp dụng khi biết được một nghiệm của phương trình (1)**

☞**Bước 1**: Nhẩm một nghiệm của phương trình (1). Giả sử nghiệm là x = x_0

☞**Bước 2**: Sử dụng phép **CHIA ĐA THỨC** hoặc sơ đồ **HOÓCNE** để phân tích vế trái thành nhân tử và đưa pt (1) về dạng tích số :

Sơ đồ

	a	b	c	d
x_0	A	B	C	0 (số 0)

Trong đó:

$$a=A,\quad x_0.A+b=B,\quad x_0.B+c=C,\quad x_0.C+d=0$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-x_0)(Ax^2+Bx+C)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ Ax^2+Bx+C=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

☞**Bước 3**: Giải phương trình (2) tìm các nghiệm còn lại (nếu có).

Ví dụ: Giải phương trình: $x^3+9x^2+11x-21=0$

IV. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

1.Phương pháp 1: Biến đổi phương trình đã cho về phương trình đã biết cách giải.

2.Phương pháp 2: Biến đổi phương trình đã cho về dạng tích số : A.B = 0; A.B.C = 0.

Định lý: $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0\end{array}\right.$; $A.B.C=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \\ C=0\end{array}\right.$

3.Phương pháp 3: Đặt ẩn phụ đưa phương trình đã cho về dạng đã biết cách giải.

4.Phương pháp 4: Biến đổi phương trình về hệ phương trình .

Định lý1: Với $A\geq 0, B\geq 0$ thì $\boxed{A+B=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0\end{cases}}$

Định lý 2: Với A, B bất kỳ thì $\boxed{A^2+B^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0\end{cases}}$

Định lý 3:

Với $A\leq K$ và $B\geq K$ (K là hằng số) thì $\boxed{A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A=K \\ B=K\end{cases}}$

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN :

Bài 1: Cho phương trình có ẩn số x : $x^2-2(m-1)x-3-m=0$

1) Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm với mọi m.

2) Tìm m sao cho nghiệm số x_1 , x_2 của phương trình thỏa mãn điều kiện: $x_1^2+x_2^2 \geq 10$

Bài 2: Cho phương trình bậc hai ẩn x : $x^2-2mx+2m-1=0$.

1) Chứng tỏ phương trình có nghiệm x_1 , x_2 với mọi m.

2) Đặt A = $2(x_1^2+x_2^2)-5x_1x_2$

a) Chứng tỏ A = $8m^2-18m+9$

b) Tìm m sao cho A = 27

3) Tìm m sao cho phương trình có nghiệm này bằng hai nghiệm kia.

Bài 3: Cho phương trình : $(m-1)x^2+2(m-1)x-m=0$ (ẩn số là x)

a) Định m để phương trình có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này

b) Định m để phương trình có hai nghiệm đều âm

Bài 3: Cho phương trình : $x^2-(2m-3)x+m^2-3m=0$

a) Chứng tỏ rằng phương trình luôn luôn có hai nghiệm khi m thay đổi

b) Định m để phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 thỏa $1 < x_1 < x_2 < 6$.

Bài 4: Cho phương trình : $(m+2)x^2-(2m-1)x-3+m=0$

a) Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm với mọi m

b) Tìm m sao cho phương trình có nghiệm này bằng hai nghiệm kia

Bài 5: Cho phương trình : $x^2-4x+m+1=0$

a) Định m để phương trình có nghiệm.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 thỏa : $x_1^2+x_2^2=10$

Bài 6: Cho phương trình : $x^2-2mx+m+2=0$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm không âm

b) Tính giá trị của biểu thức $E=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ theo m.

Bài 7: Cho phương trình : $3x^2-mx+2=0$

Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $x_1^2-x_2^2=\frac{5}{9}$

Bài 8: Cho phương trình : $x^2-2(m+4)x+m^2-8=0$

Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1 , x_2 thỏa mãn :

a) $A=x_1+x_2-3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

b) $B=x_1^2+x_2^2-x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm hệ thức giữa x_1 , x_2 không phụ thuộc vào m

Bài 9: Cho phương trình : $x^2-4x-(m^2+3m)=0$

a) Chứng tỏ phương trình có nghiệm x_1 , x_2 với mọi m.

b) Xác định m để : $x_1^2+x_2^2=4(x_1+x_2)$

c) Lập phương trình bậc hai ẩn y có hai nghiệm y_1 , y_2 thỏa mãn :

$y_1+y_2 = x_1 + x_2$ và $\frac{y_1}{1-y_2}+\frac{y_2}{1-y_1}=3$

Bài 10: Cho phương trình : $x^2-2(m-3)x-2(m-1)=0$

a) Chứng tỏ phương trình có nghiệm x_1 , x_2 với mọi m.

b) Gọi x_1 , x_2 là 2 nghiệm của phương trình . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:P= $x_1^2+x_2^2$.

Bài 11: Cho phương trình : $mx^2+2mx+m^2+3m-3=0$ (1)

a) Định m để phương trình (1) vô nghiệm

b) Định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn : $|x_1-x_2|=1$

Bài 12: Cho phương trình : $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 4 = 0$

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = x_1^2 + x_2^2$

Bài 13: Giải các phương trình sau:

1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
2. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$
3. $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + x - 6) = 24$
4. $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$
5. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$

Bài 14:

Giải các phương trình sau:

1. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$
2. $x^3 + 4x^2 - 29x + 24 = 0$
3. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Bài 15:

Cho phương trình bậc ba : $x^3 - (2m+1)x^2 - (3m^2 - 6m + 2)x + 3m^2 - 4m + 2 = 0$ (1)

1. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 trong đó $x_1 = 1$ với mọi m
2. Xác định m để biểu thức P = $x_1 + |x_2 - x_3|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó và các nghiệm x_1, x_2, x_3 tương ứng .

Bài 16: Giải các phương trình sau:

1. $\dfrac{2x^2+1}{3x} + \dfrac{x}{2x-1} = \dfrac{7x-6}{6}$
2. $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$
3. $(x+2)^2 + (x+3)^3 + (x+4)^4 = 2$
4. $(x+9)(x+10)(x+11) - 8x = 0$
5. $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1) = 4$
6. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x})$

Bài 17:

Cho phương trình : $x^4 + 2mx^2 + 4 = 0$

Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thoả mãn

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32$$

Chuyên đề 5:

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

I. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Dạng : $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

a. Cách giải : Phép thế , phép cộng .

b. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

1) $\begin{cases} 5x+6y=17 \\ 9x-y=7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x+2y=17 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+3)(y+3)-\frac{1}{2}xy=36 \\ \frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}(x-2)(y-4)=26 \end{cases}$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} \frac{16}{x}+\frac{16}{y}=1 \\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2}{x+y}+\frac{1}{x-y}=3 \\ \frac{1}{x+y}-\frac{3}{y-x}=1 \end{cases}$

Đáp số: 1) $\begin{cases} x=24 \\ y=48 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=\frac{77}{20} \\ y=-\frac{63}{20} \end{cases}$

Ví dụ 3: Cho phương trình: $\begin{cases} 2x+3y=m \\ 15x-3y=3 \end{cases}$. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm $(x;y)$ sao cho $x>0, y>0$.

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 2x+my=5 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ (1)

Tìm giá trị của m để hệ (1) có nghiệm (x; y) thoả mãn hệ thức: $x - y + \frac{m+1}{m-2} = -4$

II. Hệ phương trình đối xứng :

1. Hệ phương trình đối xứng loại I:

a. Định nghĩa: Đó là hệ chứa hai ẩn x,y mà khi ta thay đổi vai trò x,y cho nhau thì hệ phương trình không thay đổi.

b. Cách giải:

Bước 1: Đặt x+y=S và xy=P với $S^2 \geq 4P$ ta đưa hệ về hệ mới chứa hai ẩn S,P.

Bước 2: Giải hệ mới tìm S,P . Chọn S,P thoả mãn $S^2 \geq 4P$.

Bước 3: Với S,P tìm được thì x,y là nghiệm của phương trình :
$X^2 - SX + P = 0$ (định lý Viét đảo).

c. Ví dụ :

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x+y+xy=3 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+xy=-7 \\ x^2+y^2-3x-3y=16 \end{cases}$

Ví dụ 2:

BAI TẠP REN LUYỆN

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 \end{cases}$

Đáp số: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)(y+1) = 8 \\ x(x+1) + y(y+1) + xy = 17 \end{cases}$

Đáp số: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $y^2 = x$

Đáp số: $m = 0; m = -2$

Chuyên đề 6:

BẤT ĐẲNG THỨC

I. Số thực dương, số thực âm:

- Nếu x là số thực dương, ta ký hiệu x > 0
- Nếu x là số thực âm, ta ký hiệu x < 0
- Nếu x là số thực dương hoặc x= 0, ta nói x là số thực không âm, ký hiệu $x \ge 0$
- Nếu x là số thực âm hoặc x= 0, ta nói x là số thực không dương, ký hiệu $x \le 0$

II. Khái niệm bất đẳng thức:

1. Định nghĩa : Số thực a gọi là lớn hơn số thực b, ký hiệu a > b nếu a-b là một số dương, tức là a-b > 0. Khi đó ta cũng ký hiệu b < a

Ta có: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

- Nếu a>b hoặc a=b, ta viết $a \ge b$. Ta có:

$$a \ge b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \ge 0$$

Quy ước :

- Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
- Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng

III. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức :

1. Tính chất 1: $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$

2. Tính chất 2: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Hệ quả 1: $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$

Hệ quả 2: $a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$

3. Tính chất 3: $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

4. Tính chất 4: $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{nếu } c > 0 \\ ac < bc & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$

Hệ quả 3: $a > b \Leftrightarrow -a < -b$

Hệ quả 4: $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} & \text{nếu } c > 0 \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$

5. Tính chất 5: $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$

6. Tính chất 6: $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

7. Tính chất 7: $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow a^n > b^n$

8. Tính chất 8: $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Hệ quả 5: Nếu a và b là hai số dương thì :

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

Nếu a và b là hai số không âm thì :

$$a \ge b \Leftrightarrow a^2 \ge b^2$$

IV. Bất đẳng thức liên quan đến giá trị tuyệt đối :

1. Định nghĩa: $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ $(x \in R)$

2. Tính chất : $|x| \geq 0$, $|x|^2 = x^2$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$

3. Với mọi $a, b \in R$ ta có :

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $|a-b| \leq |a| + |b|$
- $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geq 0$
- $|a-b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leq 0$

V. Bất đẳng thức trong tam giác :

Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì :

- $a > 0, b > 0, c > 0$
- $|b-c| < a < b+c$
- $|c-a| < b < c+a$
- $|a-b| < c < a+b$
- $a > b > c \Leftrightarrow A > B > C$

VI. Các bất đẳng thức cơ bản :

a. Bất đẳng thức Cauchy:

Cho **hai số không âm a; b** ta có :

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a=b

Cho **ba số không âm a; b; c** ta có :

$$\boxed{\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a=b=c

Tổng quát :

Cho **n số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$** ta có :

$$\boxed{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Các phương pháp cơ bản chứng minh bất đẳng thức :

Ta thường sử dụng các phương pháp sau

1. Phương pháp 1: Phương pháp biến đổi tương đương

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh đến một bất đẳng thức đã biết rằng đúng .

Ví dụ:

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với mọi số thực a,b,c
2. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ với mọi a,b

2. <u>Phương pháp 2</u>: **Phương pháp tổng hợp**

Xuất phát từ các <u>bất đẳng thức đúng đã biết</u> dùng <u>suy luận toán học</u> để suy ra điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 1</u>: a) Cho hai số dương a và b thoả mãn $3a+2b=1$. Chứng minh: $ab\le\frac{1}{24}$

b) Cho hai số dương a và b thoả mãn $ab=1$. Chứng minh: $4a+9b\ge 12$

<u>Ví dụ 2</u>: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y=\frac{5}{4}$. Chứng minh rằng: $\frac{4}{x}+\frac{1}{4x}\ge 5$

<u>Ví dụ 3</u>: Cho x,y,z là các số dương. Chứng minh rằng: $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)\ge 8$

<u>Ví dụ 4</u>: Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng : $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\ge 9$

<u>Ví dụ 5</u>: Cho a,b,c >0 và abc=1. Chứng minh rằng : $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$

ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TÌM
GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA CÁC BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

<u>Phương pháp</u>:

Để tìm GTLN của biểu thức A (phụ thuộc vào một hay nhiều biến) ta có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Chứng minh : $A\le$ hằng số M

Bước 2: Chỉ ra các biến để $A=$ M

Bước 3: Kết luận GTLN của A là M.

Để tìm GTNN của biểu thức A (phụ thuộc vào một hay nhiều biến) ta có thể thực hiện như sau:

Bước 1: Chứng minh : $A\ge$ hằng số m

Bước 2: Chỉ ra các biến để $A=m$

Bước 3: Kết luận GTNN của A là m

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1:

Cho x,y là hai số dương thay đổi sao cho $\frac{4}{x}+\frac{9}{y}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

a. P = xy

b. Q= x + y

Bài 2:

Cho x,y thay đổi sao cho $0\le x\le 3$ và $0\le y\le 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

P = (3-x)(4-y)(2x+3y)

Bài 3:

Số thực x thay đổi và thoả mãn điều kiện $x^2+(3-x)^2\ge 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

P = $x^4+(3-x)^4+6x^2(3-x)^2$

Bài 4:

Cho x,y là các số dương thoả mãn : $x^2+y^2=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=(x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2$$

Bài 5:

Cho x,y là hai số dương có tổng bằng 1.Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

a. $A=(x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2$

b. $B=2(x^4+y^4)+\frac{1}{4xy}$

c. $C=(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})$

Bài 6:

Cho hai số dương x,y thay đổi và thoả x+y=5. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng

$$P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

Chú ý : Ngoài cách tìm GTLN và GTNN bằng cách sử dụng bất đẳng thức, ta có thể sử dụng phương pháp **điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai**

Ví dụ : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

1. $y=\frac{x^2+2}{x^2+x+2}$ 2. $y=\frac{x^2}{x^2-5x+7}$

Chuyên đề 7

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. Định nghĩa và các tính chất cơ bản :

1. Định nghĩa: $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

2. Tính chất :

$|A| \geq 0$, $|A|^2 = A^2$

Lưu ý: $\sqrt{A^2} = |A|$

II. Các định lý cơ bản :

a) Định lý 1 : Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

b) Định lý 2 : Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2$

III. Các phương trình cơ bản & cách giải :

Phương pháp chung để giải loại này là KHỬ DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI bằng định nghĩa hoặc nâng lũy thừa.

* **Dạng 1 :** $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$

* **Dạng 2 :** $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases}$,

IV. Các cách giải phương trình chứa giá trị tuyệt đối thường sử dụng :

* **Phương pháp 1 :** **Biến đổi về dạng cơ bản**

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

1) $|x^2 - x - 2| = |x^2 + 2x|$ 2) $|x^2 - 4x + 3| = x + 3$

* **Phương pháp 2 :** **Sử dụng phương pháp chia khoảng**

Ví dụ : Giải phương trình sau : $|x - 1|(2x - 1) = 3$

Chuyên đề 8:

PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC

I. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Các công thức và tính chất cơ bản:

- $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$
- $\sqrt{A} \geq 0$ với $A \geq 0$
- $\sqrt{A^2} = |A|$ và $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$
- $(\sqrt{A})^2 = A$ với $A \geq 0$
- $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ khi $A,B \geq 0$
- $\sqrt{A.B} = \sqrt{-A}.\sqrt{-B}$ khi $A,B \leq 0$

2. Các định lý cơ bản:

1. Định lý 1: Với A,B bất kỳ thì : $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$

2. Định lý 2: Với $A, B \geq 0$ thì : $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

3. Định lý 3: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

4. Định lý 4: Với $A, B \geq 0$ thì : $A + B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

5. Định lý 5: $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

6. Định lý 6: Với $A \leq K$ và $B \geq K$ (K là hằng số) thì : $A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A=K \\ B=K \end{cases}$

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC:

1. **Phương pháp 1**: Nâng luỹ thừa khử căn thức

Ví dụ : Giải phương trình :

1. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x-3}$
2. $\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x-5)} = \sqrt{x(x+3)}$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
4. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$

2. **Phương pháp 2**: Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình đại số

Ví dụ : Giải phương trình :

1. $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1 - x$
2. $2\sqrt{\dfrac{3x-1}{x}} = \dfrac{x}{3x-1} + 1$
3. $2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3$

3. **Phương pháp 3**: Đặt ẩn phụ chuyển về hệ phương trình đại số

Ví dụ : Giải phương trình :

1. $\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{10 - x^2} = 3$
2. $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$
3. $5\sqrt{1+x^3} = 2(x^2 + 2)$

4. **Phương pháp 4**: Biến đổi phương trình về hệ phương trình

Ví dụ : Giải phương trình :

1. $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$
2. $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

5. **Phương pháp 5**: Biến đổi phương trình về dạng tích số

Ví dụ : Giải phương trình :

$(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x^2+7x+10})=3$

6. **Phương pháp 6**: Biến đổi phương trình về phương trình có chứa giá trị tuyệt đối

Ví dụ : Giải phương trình :

1. $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=5$

2. $\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$

II. BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Bài 1: Cho phương trình : $x+2\sqrt{x-1}-m^2+6m-11=0$

a. Giải phương trình khi m=2

b. Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi m

Bài 2: Cho phương trình : $x-\sqrt{x+1}=m$ (1) trong đó m là tham số

a. Giải phương trình (1) khi m=1

b. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Chuyên đề 9:

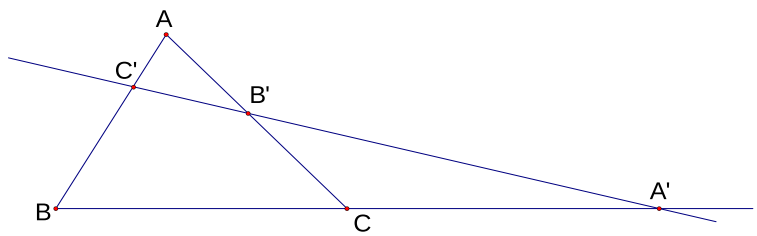
HÌNH HỌC PHẲNG

A. Kiến thức bổ sung quan trọng :

1.Định lý Ménélaus:

Cho ba điểm $A^{'}$,$B^{'}$,$C^{'}$ lần lượt nằm trên ba đường thẳng chứa ba cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC sao cho trong chúng hoặc không có điểm nào, hoặc có đúng hai điểm thuộc cạnh tam giác ABC. Khi đó:

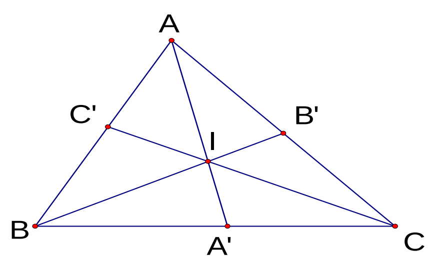
$$\left[A^{'},B^{'},C^{'} \text{ thẳng hàng}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{A^{'}B}{A^{'}C}.\frac{B^{'}C}{B^{'}A}.\frac{C^{'}A}{C^{'}B}=1\right]$$



2. Định lý Céva:

Cho ba điểm $A^{'}$,B’,C’lần lượt thuộc ba cạnh BC, CA, AB . Khi đó

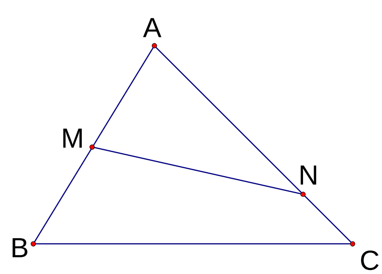
$$\left[AA^{'},BB^{'},CC^{'} \text{ đồng quy tại một điểm I}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{A^{'}B}{A^{'}C}.\frac{B^{'}C}{B^{'}A}.\frac{C^{'}A}{C^{'}B}=1\right]$$

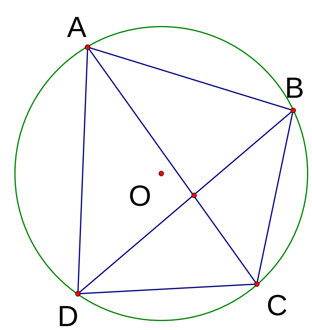


3. Tỉ số diện tích :

Cho hai điểm M, N nằm trên hai đường thẳng chứa hai cạnh AB và AC của tam giác ABC ta luôn có hệ thức :

$$\frac{dt(\Delta AMN)}{dt(\Delta ABC)}=\frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC}$$





4. Đẳng thức Ptolémée:

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) ta luôn có hệ thức:

AC.BD=AB.CD+AD.BC

5. Bất đẳng thức Ptolémée:

Cho tứ giác ABCD ta luôn có : $AC.BD \le AB.CD + AD.BC$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABCD nội tiếp đường tròn

6. Tứ giác nội tiếp:

Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại N , hai đường thẳng AB,CD cắt nhau tại M . Khi đó các điều sau tương đương :

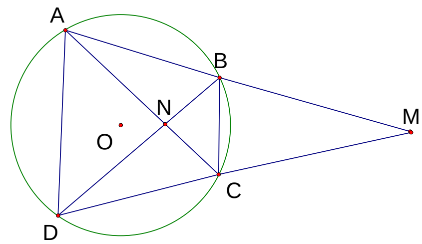
i. Tứ giác ABCD nội tiếp

ii. $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$

iii. $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0$

iv. MA.MB=MC.MD

v. NA.NC=NB.ND



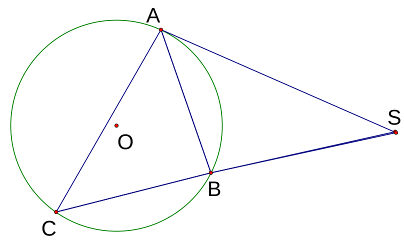
7. Điều kiện tiếp xúc :

Cho tam giác ABC và điểm S thuộc tia đối của tia BC. Khi đó các mệnh đề sau tương đương

i. SA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

ii. $\widehat{ACB} = \widehat{BAS}$

iii. $SA^2 = SB.SC$



B. Các bài toán luyện tập:

Bài 1: Chứng minh rằng trong một tam giác ABC, nếu có ba đường thẳng AA',BB',CC' cắt nhau tại một điểm K nằm trong tam giác ($A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$) thì

a) $\frac{KA'}{AA'} + \frac{KB'}{BB'} + \frac{KC'}{CC'} = 1$

b) $\frac{AK}{AA'} + \frac{BK}{BB'} + \frac{CK}{CC'} = 2$

c) $\frac{AK}{KA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}$

Bài 2: Trên trung tuyến AD của một tam giác ABC, cho một điểm K sao cho AK=3KD;BK cắt AC tại P. Tính tỉ số diện tích hai tam giác ABP , BCP.

Bài 3: Cho một tam giác ABC, một điểm K trên AB sao cho $\frac{AK}{KB} = \frac{1}{2}$, một điểm L trên trên BC sao cho $\frac{CL}{LB} = \frac{2}{1}$. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AL và CK . Tìm diện tích tam giác ABC nếu biết diện tích của tam giác BQC bằng 1 (đơn vị diện tích)

Bài 4: Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB và BC lấy lần lượt hai điểm M và N sao cho AB=5AM, BC=3BN. Gọi O là giao điểm của AN và CM . Tính tỉ số diện tích của tam giác AOC và diện tích tam giác ABC

Bài 5: Cho tam giác ABC . Gọi F là giao điểm hai đường phân giác trong AD và CF (D thuộc BC, E thuộc AB) . Tính tỷ số diện tích tam giác ADF và diện tích tam giác ABC theo ba cạnh BC=a,AC=b,AB=c

Bài 6: Cho tam giác ABC và AM,BN,CP là các đường phân giác trong của nó . Tính tỷ số diện tích tam giác MNP và điện tích tam giác ABC theo các cạnh BC=a,AC=b,AB=c

Bài 7: Cho đường tròn O và một dây AB của đường tròn đó . Các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường trò cắt nhau tại C . Kẻ dây CD của đường tròn có đường kính OC (D khác A và B). CD cắt cung $\widehat{AB}$ của đường tròn (O) tại E (E nằm giữa C và D) . Chứng minh :

a. $\widehat{BED} = \widehat{DAE}$ **b.** $DE^2 = DA.DB$

Bài 8: Giả sử H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Trên đoạn HB và HC lấy hai điểm M,N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^0$. Chứng minh rằng AN=AM.

Bài 9: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 45^0$. Gọi M và N lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC .

1. Tính tỷ số $\dfrac{MN}{BC}$
2. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $OA \perp MN$

Bài 10: Cho nữa đường tròn (O) đường kính AB=2R (R là độ dài cho trước). M, N là hai điểm trên nửa đường tròn (O) sao cho M thuộc cung AN và tổng các khoảng cách từ AB đến đường thẳng MN bằng $R\sqrt{3}$.

1. Tính độ dài đoạn MN theo R
2. Gọi giao điểm của hai dây AN và BM là I, giao điểm của các đường thẳng AM và BN là K . Chứng minh rằng 4 điểm M,N,I,K cùng nằm trên một đường tròn , Tính bán kính của đường tròn đó theo R.
3. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác KAB theo R khi M,N thay đổi nhưng vẩn thỏa mãn giả thiết của bài toán .

Bài 11: Cho hình vuông ABCD , M là điểm thay đổi trên cạnh BC (M không trùng với B) và N là điểm thay đổi trên cạnh CD (N không trùng với D) sao cho:

góc MAN= góc MAB + góc NAD

1. BD cắt AN và AM tương ứng tại P và Q . Chứng minh 5 điểm P, Q, M, C, N cùng nằm trên một đường tròn
2. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M và N thay đổi
3. Ký hiệu diện tích của tam giác APQ là S_1 và diện tích của tứ giác PQMN là S_2. Chứng minh rằng tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ không thay đổi khi M và N thay đổi.

Bài 12: Cho tam giác ABC có đường cao BD . Giả sử (C) là một đường tròn có tâm O nằm trên đoạn AC và lần lượt tiếp xúc với BA, BC tại M và N

1. Chứng minh rằng 4 điểm B, M, D, N nằm trên một đường tròn
2. Chứng minh rằng góc ADM = góc CDN

Bài 13: Cho tứ giác lồi ABCD , có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau và bằng nhau . Giả sử $AB = \sqrt{3}; BC = \sqrt{6}; CD = 3$. Trên nữa mặt phẳng với bờ là đường thẳng AC không chứa điểm B , dựng hình vuông ACMN . Trên nữa mặt phẳng với bờ là đường thẳng MD không chứa điểm N , dựng tia Mx vuông góc với MD và lấy điểm E thuộc tia Mx sao cho ME =MD

1. Chứng minh rằng 4 điểm C, D, M, N thuộc một đường tròn
2. Tính các góc của tứ giác ABCD.

Chuyên đề 10:

LÝ THUYẾT SỐ

I. Phép chia hết:

1. Định lý cơ bản về phép chia:

Cho a,b $\in \mathbb{Z}$ và b $\neq 0$, khi đó có hai số nguyên q, r duy nhất sau cho a=bq+r với $0 \le r < |b|$

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}(b \neq 0), \exists q,r \in \mathbb{Z}, 0 \le r < |b| : a = bq + r$$

Nhận xét :

- Cho a,b $\in \mathbb{Z}$ và b $\neq 0$. Khi chia a cho b có thể xảy ra $|b|$ số dư là :0,1,2,...,$|b|-1$
- Khi chia n+1 số nguyên cho n ($n \ge 1$) luôn có hai số cùng số dư
- Tích của n số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho n

2. Phép chia hết:

a.Định nghĩa: Cho a,b $\in \mathbb{Z}$ và b $\neq 0$ .Ta nói a chia hết cho b, ký hiệu là $a \vdots b$, nếu tồn tại số nguyên q sao cho a=bq

$$a \vdots b \overset{đn}{\Leftrightarrow} \exists q \in \mathbb{Z} \text{ sao cho a=bq}$$

- Khi a chia hết cho b thì ta nói b là ước của a và ký hiệu $b|a$
- Số nguyên dương a>1 chỉ có hai ước dương là 1 và chính nó gọi là số nguyên tố . Tập hợp các số nguyên tố ký hiệu là $\wp$. Các số tự nhiên lớn hơn 1 và không phải là số nguyên tố thì gọi là hợp số.
- UCLN của hai số nguyên dương a và b là số nguyên dương lớn nhất chia hết cho cả a và b ký hiệu: UCLN(a,b) hay (a,b).BCNN của hai số nguyên dương a và b là số nguyên dương nhỏ nhất chia hết cho cả a và b, ký hiệu: BCNN(a,b) hay [a,b]
- Hai số nguyên a và b được gọi là nguyên tố cùng nhau , ký hiệu (a,b)=1 , nếu ước chung lớn nhất của nó là 1

b. Tính chất: Cho $a,b,c,m \in \mathbb{Z}$; $c,m \ge 1$. Khi đó :

a) $a \vdots b, b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$

b) $a \vdots m, b \vdots m \Rightarrow a \pm b \vdots m$

c) $ab \vdots c, (b,c) = 1 \Rightarrow a \vdots c$

d) $a \vdots b, a \vdots c, (b,c) = 1 \Rightarrow a \vdots bc$

e) Cho $p \in \wp$. Khi đó : $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ hoặc b$\vdots p$

Nhận xét:

- Trong n số nguyên liên tiếp ($n \ge 1$) luôn có một và chỉ một số chia hết cho n.
- Tích của n số nguyên liên tiếp ($n \ge 1$) chia hết cho n .
- Với $n \in \mathbb{N}$ ta có : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$

  Với n lẻ ta có : $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$

  Suy ra:

  * $a,b \in \mathbb{Z}$ và $a \neq b$ thì $a^n - b^n \vdots (a-b)$ $(n \in \mathbb{N})$

  * $a,b \in \mathbb{Z}$, n lẻ và $a \neq -b$ thì $a^n + b^n \vdots (a+b)$

  * $a,b \in \mathbb{Z}$, n chẵn và $a \neq -b$ thì $a^n - b^n \vdots (a+b)$

- Chia n cho p ta được các số dư là 0,1,2,...,p-1. Đặc biệt khi p lẻ ta có thể viết:

$$n = kp+r \text{ với } r = 0, \pm 1, ..., \pm \frac{p-1}{2}$$

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng :

1. Tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8
2. Tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6
3. Tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9

Ví dụ 2:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên m,n:

1. $n^3 + 11n \vdots 6$
2. $mn(m^2 - n^2) \vdots 3$
3. $n(n+1)(2n+1) \vdots 6$

Ví dụ 3:

Với n chẵn, chứng minh rằng : $20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$

Ví dụ 4:

Chứng minh rằng với n là số tự nhiên :

1. $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$
2. $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$
3. $7.5^{2n} + 12.6^n \vdots 19$

II. Đồng dư :

1. Định nghĩa: Cho a, b là các số nguyên và n là số nguyên dương . Ta nói a đồng dư với b theo theo môđun n nếu a và b có cùng số dư khi chia cho n , ký hiệu: $a \equiv b (\text{mod } n)$

$$\boxed{a \equiv b(\text{mod } n) \Leftrightarrow a-b \vdots n}$$

Nhận xét:

- Trong trường hợp $|b| < n$ thì:

$a \equiv b(\text{mod } n)$ **có nghĩa là chia a cho m có dư là b**

Đặc biệt : $a \equiv 0(\text{mod } n)$ **có nghĩa là a chia hết cho n**

2. Tính chất: Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Khi đó :

- Nếu a ≡ b (mod n) và b ≡ c (mod n) thì a ≡ c (mod n)
- Nếu a ≡ b (mod n) thì a+c ≡ b+c (mod n)
- Nếu a ≡ b (mod n) thì ac ≡ bc (mod n)
- Nếu a ≡ b (mod n) thì $a^n \equiv b^n$ (mod n)
- $(a+b)^n \equiv b^n$ (mod a), a>0

3. Định lý FETMAT:

Nếu p là số nguyên tố thì $n^p \equiv n$ (mod p)
($n^p - n$ chia hết cho p) với mọi số nguyên n

Đặc biệt:

Cho $p \in \wp$,(a,p)=1. Khi đó :
$a^{p-1} \equiv 1$ (mod p)

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng :

1. $2^{2002} - 4 \vdots 31$
2. $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$

Ví dụ 2:

1. Tìm dư trong phép chia 3^{2003} chia cho 13
2. Tìm dư của phép chia 2004^{2004} chia cho 11

III. Số nguyên tố & hợp số và số chính phương & số không chính phương_ :

1. Số nguyên tố & hợp số:

a. Định nghĩa:

* Số tự nhiên a $(a \geq 2)$ gọi là số nguyên tố nếu a chỉ có ước số dương là 1 và chính a.

* Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn hai ước số .

b. Định lý cơ bản của số học:

Mọi số lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất (không kể thứ tự các thừa số).

Định lý:

Mọi số tự nhiên a > 1 đều có thể phân tích được dưới dạng : $a = p_1^{n_1}.p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$, trong đó $p_1,p_2,...,p_k$ là các số nguyên tố phân biệt , $n_1,n_2,...,n_k$ là các số tự nhiên, $k \in \mathbb{N}^*$

Dạng phân tích trên là duy nhất và gọi là dạng phân tích tiêu chuẩn của số tự nhiên a.

2. Số chính phương & số không chính phương :

a. Định nghĩa số chính phương :

* Số nguyên a là số chính phương nếu nó là bình phương của một số nguyên ,

tức là $a=b^2$, trong đó b là số nguyên.

a là số chính phương $\Leftrightarrow$ $a = b^2$ $(b \in \mathbb{Z})$

b. Số không chính phương :

1. $a \vdots p$ và $a \not\vdots p^2$ (p nguyên tố) $\Rightarrow$ a không chính phương
2. $b^2 < a < (b+1)^2$ *với* $b \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ a không chính phương
3. a có chữ số tận cùng là 2 (hoặc 3 hoặc 7 hoặc 8)
   hoặc a có chữ số hàng đơn vị là 6 mà chữ số hàng chục là chẵn
   hoặc a có chữ số hàng đơn vị khác 6 mà chữ số hàng chục lẻ
   hoặc a có chử số hàng đơn vị là 5 mà chữ số hàng chục khác 2
   hoặc a có chữ số tận cùng là hai chữ số lẻ... thì a không chính phương
4. a có một trong các dạng sau 3k+2; 4k+2; 4k+3; 5k+2; 5k+3; 6k+2; 6k+5; 7k+3;... thì a không chính phương.

Chuyên đề 11:

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Các phương pháp giải thường sử dụng :

I. Phương pháp 1: Phương pháp đánh giá miền giá trị của các biến

Bài 1: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn : $y(x-1)=x^2+2$

Bài 2: Tìm $x;y\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn : $2x^2-2xy=5x-y-19$

Bài 3: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $xy^2+2xy-243y+x=0$

Bài 4: Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x;y) của phương trình : $(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$

Bài 5: Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x;y) của phương trình : $7(x+y)=3(x^2-xy+y^2)$

Bài 6: Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x;y) của phương trình : $12x^2+6xy+3y^2=28(x+y)$

Bài 7: Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn đẳng thức

$$2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+xy$$

Bài 8: Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn đẳng thức

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2$$

II. Phương pháp 2: Phương pháp đưa về phương trình tích

Bài 1: Tìm x; y nguyên thỏa mãn các phương trình sau:

1. $x^2+2y^2+3xy+3x+5y=15$
2. $2x^2+6y^2+7xy-x-y=25$
3. $9x^2-10y^2-9xy+3x-5y=9$

Chuyên đề 12:

Giải toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Bài 1:

Lấy một số tự nhiên có hai chữ số chia cho số viết bởi hai chữ số ấy có thứ tự ngược lại thì được thương là 4 và dư là 15. Nếu lấy số đó trừ đi 9 thì được một số bằng tổng bình phương của mỗi chữ số đó . Tìm số tự nhiên ấy

Bài 2:

Tìm một số có hai chữ số , biết rằng chữ số đó gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó và nếu đem số cần tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và số dư là 3.

Bài 3:

Cho một số gồm hai chữ số . Tìm số đó , biết rằng tổng 2 chữ số của nó nhỏ hơn số đó 4 lần và thêm 45 vào tích của 2 chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho

Bài 4:

Tổng các chữ số của một số có hai chữ số bằng 6 . Nếu thêm vào đó 18 thì số thu được cũng viết bằng chữ số đó nhưng theo thứ tự ngược lại. Hãy tìm số đó.

Bài 5:

Chữ số hàng chục của một số có hai chữ số hơn chữ số hàng đơn vị là 5 . Nếu đổi chổ hai chữ số cho nhau sẽ được một số bằng $\frac{3}{8}$ số ban đầu. Tính số ban đầu.

Bài 6:

Cho một số gồm hai chữ số . Tìm số đó , biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần và thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được một số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho

Bài 7:

Tìm số tự nhiên có hai chữ số , biết rằng nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương 4 và dư là 3 , còn nếu đem số đó chia cho tích các chữ số của nó thì được thương là 3 và dư là 5.

Bài 8:

Một số nguyên dương có hai chữ số . Biết rằng tổng của hai chữ số của số nguyên dương nầy bằng tích của hai chữ số cộng với 1 . Nếu lấy tổng của hai chữ số nhân với 4 thì kết quả bằng đúng với số nguyên dương đã cho. Tìm số nguyên dương có tính chất trên.

---------------------------------**Chúc các em thành công**------------------------------